

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

14. Übungsblatt

Keine Abgabe!

Themen: Fouriertransformation, Faltung

Aufgabe 40 (K) Sei $f(x) = 1, |x| \leq 1$ und $f(x) = 0, |x| > 1$. Man berechne $\widehat{f * f}$ und zeige

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \pi.$$

Aufgabe 41 (K)

(a) Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und absolut integrierbar. Ferner sei g beschränkt. Zeigen Sie:

$$f * g = g * f.$$

(b) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, stückweise glatt und absolut integrierbar, und ist auch $g := \widehat{f}$ absolut integrierbar, so gilt $f(t) = 2\pi \widehat{g}(-t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(c) Für $\alpha > 0$ sei $\gamma_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma_\alpha(s) := 2\alpha/(\alpha^2 + s^2)$. Zeigen Sie

$$\gamma_\alpha * \gamma_\beta = \gamma_{\alpha+\beta}$$

für alle $\alpha, \beta > 0$.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\gamma_\alpha * \gamma_\beta$ stückweise glatt ist.

Aufgabe 42 Die Funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sei beliebig oft differenzierbar und es gelte $\phi(t) = 0$ für $|t| \geq 1$. Zeigen Sie, dass dann $s \mapsto s^n \widehat{\phi}(s)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine beschränkte Funktion ist.