Lösungen zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 40

$$(f*f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} f(x-y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{x-1}^{x+1} f(z)\,dz$$

$|x| \geq 2$: $(f*f)(x) = 0$

$x \in (-2,0]$: $(f*f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{x+1} 1\,dz = \frac{1}{2\pi}(2+x)$

$x \in [0,2)$: $(f*f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{x-1}^{1} 1\,dz = \frac{1}{2\pi}(2-x)$

$$\Rightarrow \quad (f*f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}(2-|x|) & x \in (-2,2) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach dem Faltungssatz gilt: $\widehat{f*f} = \hat{f}\cdot\hat{f}$

Aus der Vorlesung ist bekannt: $\hat{f}(s) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin s}{s}$

Mit der Umkehrformel folgt schließlich:

$$(f*f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\,\widehat{f*f}(s)\,ds = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\left(\frac{\sin s}{s}\right)^2 ds$$

Setze $x=0$:

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin s}{s}\right)^2 ds = (f*f)(0) = \frac{1}{\pi} \quad \Rightarrow \text{Beh.}$$

Aufgabe 41

(a) Da f, g stetig und abs. int. und g beschr., ex. $f*g$ sowie $g*f$.

$$(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy \underset{x-y=z}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(x-z)\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x-z)f(z)\,dz = (g*f)(x)$$

(b) Da f stetig und $\hat{f}$ absolut integrierbar lautet die Fourier-Umkehrformel in diesem (2)

$$f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is(-t)} \hat{f}(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} \hat{f}(s)\,ds$$

$$= 2\pi \hat{\hat{f}}(t) = 2\pi \hat{g}(t) \Rightarrow \text{Beh.}$$

(c) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|}$. Aus der Vorlesung ist bekannt

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+s^2}.$$

Damit und mit dem Dilationssatz gilt: $(\alpha > 0)$:

$$\gamma_\alpha(s) = \frac{2\pi}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{s}{\alpha}\right) = 2\pi \hat{f_\alpha}(s), \text{ wobei } f_\alpha(x) := f(\alpha x).$$

Mit dem Faltungssatz folgt: $(\alpha, \beta > 0)$:

$$\widehat{\gamma_\alpha * \gamma_\beta} = \widehat{\gamma_\alpha} \cdot \widehat{\gamma_\beta} = 4\pi^2 \hat{\hat{f_\alpha}} \cdot \hat{\hat{f_\beta}}$$

$$\underset{(b)}{=} f_\alpha(-t) \cdot f_\beta(-t) = e^{-\alpha|-t|} \cdot e^{-\beta|-t|}$$

$$= e^{-(\alpha+\beta)|t|} \underset{(b)}{=} \hat{\hat{f}}_{\alpha+\beta} \cdot 2\pi$$

$$= \widehat{\gamma_{\alpha+\beta}}$$

$$\Rightarrow \gamma_\alpha * \gamma_\beta = \gamma_{\alpha+\beta}.$$

<u>Aufgabe 42</u>

Da $\phi(t) = 0$ für $|t| > 1$ gilt $\phi^{(n)}(t) = 0$ für $|t| > 1$, und $\phi^{(n)}$ ist auf $[-1,1]$ stetig. Damit existieren $\min_{t \in [-1,1]} \phi^{(n)}(t)$ und $\max_{t \in [-1,1]} \phi^{(n)}(t)$.

Nach dem Differentiationssatz gilt:

$$s^n \hat{\phi}(s) = \widehat{\phi^{(n)}}(s) \cdot i^{-n}$$

$$\Rightarrow \quad |s^n \phi^{(n)}(s)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \phi^{(n)}(x)\, dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi^{(n)}(x)|\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \phi^{(n)} = 0 \\ \text{außerhalb } [-1,1]}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} |\phi^{(n)}(x)|\, dx$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \max\left\{ \left|\min_{x \in [-1,1]} \phi^{(n)}(x)\right|, \left|\max_{x \in [-1,1]} \phi^{(n)}(x)\right| \right\}$$

$$< \infty$$

$\Rightarrow$ Beh.