Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Andreas Hirsch

SS 2015
20.04.2015

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

1. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, 27.04.2015, 12.30 Uhr

Aufgabe 1 (K)

(a) Definiere $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(0,0) \coloneqq 1$ und

$$f(x,y) \coloneqq \frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Beweisen Sie, dass dann die beiden Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \text{ und } \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

existieren und mit $f(0,0)$ übereinstimmen, aber f in $(0,0)$ unstetig ist.

(b) Sei

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) \coloneqq \begin{cases} \frac{x^2}{y}, & \text{falls } x^2 < y, \\ \frac{y}{x^2}, & \text{falls } 0 < y \le x^2, \\ 0, & \text{sonst .} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Funktion g ist auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig und in $(0,0)$ unstetig. Für alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ gilt dennoch $g(ta,tb) \to 0$ für $t \to 0$.

Aufgabe 2

Für eine Funktion $f\colon (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \to \mathbb{R}$ betrachten wir die Grenzwerte

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ und

(iii) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $f(x,y) = x\sin\left(\frac{1}{y}\right)$ existieren nur die Grenzwerte (i) und (iii).

(b) Für $f(x,y) = y\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ existieren nur die Grenzwerte (i) und (ii).

(c) Für $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ existieren nur die Grenzwerte (ii) und (iii) und diese sind identisch.

(d) Für $f(x,y) = x\sin\left(\frac{1}{y}\right) + y\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert nur der Grenzwert (i).

(e) Für $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} + y\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert nur der Grenzwert (ii).

(f) Für $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} + x\sin\left(\frac{1}{y}\right)$ existiert nur der Grenzwert (iii).

Aufgabe 3 (K)

(a) Untersuchen Sie jeweils, ob $f(x,y)$ für $(x,y) \to (0,0)$ konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(i) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$, (ii) $f(x,y) = \frac{xy}{e^{x^2}-1}$.

(b) Welche der folgenden Funktionen sind an der Stelle $(0,0)$ stetig?

(i) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ f(x,y) = \begin{cases} (1+|xy|)^{\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{, falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(ii) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}\sin(x-y) & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Aufgabe 4

Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, so existieren unendlich viele Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = f(-x)$.

Übungsblatt

Jeden Montag erscheint ein Übungsblatt zur schriftlichen Bearbeitung und kann unter

http://www.math.kit.edu/iana2/lehre/hm2info2015s/

heruntergeladen oder in Raum 3.066 des Kollegiengebäude Mathematik (20.30) abgeholt werden. Die (K)-Aufgaben können zur Korrektur im Foyer von Gebäude (20.30) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und deutlich sichtbar die Nummer des Tutoriums sowie den Namen des Tutors auf die Blätter und heften diese zusammen.

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer in den Übungsblättern 1-7 und 8-14 **jeweils** mindestens 28 Punkte erzielt.

Anmeldung für den Übungsschein

Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im QISPOS-System (Selbstbedienungsfunktionen für Studierende). Die Prüfungsnummer des Scheins lautet 263. Ohne eine rechtzeitige **Anmeldung bis spätestens 30.06.2015** werden Sie den Schein nicht bekommen, selbst wenn Sie genügend Punkte gesammelt haben!