Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Andreas Hirsch

SS 2015
04.05.2015

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

3. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, 11.05.2015, 12.30 Uhr

Aufgabe 9

(a) Betrachten Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f stetig partiell differenzierbar ist und dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existieren, aber voneinander verschieden sind.

(b) Betrachten Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^6+y^6}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass in allen Punkten beide partiellen Ableitungen erster Ordnung existieren und berechnen Sie diese. Zeigen Sie zudem, dass f in $(0,0)$ nicht stetig ist.

Aufgabe 10 (K)

(a) Betrachten Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; f(x,y) := \begin{cases} x^2y^2 \log(x^2+y^2) + \sin(x), & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f in jedem Punkt und untersuchen Sie sie auf Stetigkeit. Ist f im Ursprung differenzierbar?

(b) Betrachten Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; f(x,y,z) := \begin{cases} \frac{x^2y^2z}{x^4+y^4+z^4}, & \text{falls } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f im Ursprung. Ist f dort differenzierbar?

Aufgabe 11 (K)

(a) Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \log \sqrt{x^2+y^2}$. Zeigen Sie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

(b) Sei $n \geq 3$ und $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{1}{\|x\|^{n-2}}$. Zeigen Sie

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Aufgabe 12
Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nichtkonstante, stetig differenzierbare Funktion und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Beweisen Sie, dass die Funktion

$$w_c\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; w_c(t,x) := \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} f(s)ds$$

zweimal stetig partiell differenzierbar ist und zeigen Sie, dass w_c der *Wellengleichung*

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w_c}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial^2 w_c}{\partial x^2}(t,x) \quad \text{für } (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

genügt.

Anmeldung für den Übungsschein
Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im QISPOS-System (Selbstbedienungsfunktionen für Studierende). Die Prüfungsnummer des Scheins lautet 263. Ohne eine rechtzeitige **Anmeldung bis spätestens 30.06.2015** werden Sie den Schein nicht bekommen, selbst wenn Sie genügend Punkte gesammelt haben!