Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Andreas Hirsch

SS 2015
11.05.2015

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

4. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, 18.05.2015, 12.30 Uhr

Aufgabe 13 (K)

Die zwei Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ werden definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 1, & 0 < y < x^2, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \qquad g(x,y) := \begin{cases} x, & xy \geq 0, \\ x+y, & xy < 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie für f und g alle Richtungsableitungen im Nullpunkt, soweit sie existieren.

Aufgabe 14

(a) Zeigen Sie, dass der Mittelwertsatz, wie er in der Vorlesung formuliert wurde, im Allgemeinen falsch ist, wenn auf die Voraussetzung $S[a,b] \subseteq D$ verzichtet wird. Betrachten Sie hierfür das Gebiet $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0; 1 < \|(x,y)\| < 2\}$ und die Funktion

$$f\colon \overline{D} \to \mathbb{R}; f(x,y) = \arccos\left(\frac{x}{\|(x,y)\|}\right).$$

Finden Sie nun geeignete Punkte $a, b \in \overline{D}$ um zu zeigen, dass der Mittelwertsatz in folgendem Sinne verletzt ist: Es existiert kein $\xi \in D$ derart, dass

$$|f(b) - f(a)| = \|f'(\xi)\| \, \|b-a\|.$$

(b) Es sei $D := (0,2)^2 \setminus [0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Zudem sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $M := \sup_{v \in D} \|f'(v)\| < \infty$. Zeigen Sie, dass für alle $v, w \in D$ gilt:

$$|f(v) - f(w)| \leq \sqrt{2} M \, \|v - w\|.$$

Aufgabe 15 (K)

Wir definieren $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; f(x,y) := x^2 + 3xy - 5y^2$ und $a := \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial a}(x,y)$ existiert, und berechnen Sie diese.

(b) Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; g(t) := (\cos(t), \sin(t))$. Zeigen Sie, dass $h := f \circ g$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung.

(c) Zeigen Sie: Für alle $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\max\{\|(x_1,y_1)\|, \|(x_2,y_2)\|\} \leq 1$ gilt

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \leq \sqrt{133} \, \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|.$$

Aufgabe 16
Wenden Sie den aus der Vorlesung bekannten Satz von Taylor auf die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\, f(x,y) \coloneqq \sqrt{x^2+y^2}$$

an der Stelle $(3,4)$ an, und schätzen Sie die Differenz aus der Funktion und ihrer linearen Approximation für $\|(x-3,y-4)\| < 0.1$ ab.

Übungsschein
Jede **(K)**-Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer in den Übungsblättern 1-7 und 8-14 **jeweils** mindestens 28 Punkte erzielt.

Anmeldung für den Übungsschein
Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im QISPOS-System (Selbstbedienungsfunktionen für Studierende). Die Prüfungsnummer des Scheins lautet 263. Ohne eine rechtzeitige **Anmeldung bis spätestens 30.06.2015** werden Sie den Schein nicht bekommen, selbst wenn Sie genügend Punkte gesammelt haben!