Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Andreas Hirsch

SS 2015
26.05.2015

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

6. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, 01.06.2015, 12.30 Uhr

Aufgabe 21 (K)
Die Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seien gegeben durch

$$f(x,y) \coloneqq (x^2, y^2), \quad g(x,y) \coloneqq (\sin(xy), e^{x+y}), \quad h(x,y) \coloneqq (e^x \cos(y), \sinh(x)).$$

Berechnen Sie die Ableitungen von f, g und h, und ermitteln Sie dann mithilfe der Kettenregel die Ableitungen der Funktionen $g \circ f$ und $h \circ g$.

Aufgabe 22 (K)

(a) Es seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Definiere

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; F(x,y) \coloneqq f(h(xy), xg(y,x), y).$$

Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist, und stellen Sie die Ableitung F' mithilfe der Kettenregel als Komposition der (partiellen) Ableitungen von f, g und h dar.

(b) Wir definieren die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x,y,z) \coloneqq xy + 2x^2, g(x,y,z) \coloneqq \big(1 + 3z, x^2 + z^2 + y, 4zy\big) \text{ für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Berechnen Sie jeweils $f', (f \circ g)', (g \circ g)'$ und $(g \circ g \circ g)'$ im Punkt $(0,0,0)$.

Aufgabe 23

(a) Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sowie $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ und $q\colon D \to \mathbb{R}$ definiert durch $q(x) \coloneqq \frac{f(x)}{g(x)}$. Bestimmen Sie die stationären Punkte von q.

(b) Es sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix und der sogenannte *Rayleigh-Quotient* $q\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$q(x) \coloneqq \frac{(Ax) \cdot x}{\|x\|^2}.$$

Zeigen Sie, dass die stationären Punkte $x \neq 0$ von q genau die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = q(x)$ sind.

Aufgabe 24
Zeigen Sie, dass es keine stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, die injektiv ist.
Hinweis: Beweis durch Widerspruch. Betrachten Sie für geschickt gewähltes $y_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; F(x,y) \coloneqq f(x,y) - f(0,y_0)$.

Klausur
Die schriftliche Prüfung der HM I/II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik findet am 15.09.2015 von 8-10 Uhr (Teil 1) und 11-13 Uhr (Teil 2) statt. Die Anmeldung für die Bachelor-Modulprüfung ist im QISPOS freigeschaltet. **Der Anmeldeschluss ist der 1. September 2015**.

Übungsschein
Jede **(K)**-Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer in den Übungsblättern 1-7 und 8-14 **jeweils** mindestens 28 Punkte erzielt.

Anmeldung für den Übungsschein
Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im QISPOS-System (Selbstbedienungsfunktionen für Studierende). Die Prüfungsnummer des Scheins lautet 263. Ohne eine rechtzeitige **Anmeldung bis spätestens 30.06.2015** werden Sie den Schein nicht bekommen, selbst wenn Sie genügend Punkte gesammelt haben!