Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Andreas Hirsch

SS 2015
01.06.2015

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

7. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, 08.06.2015, 12.30 Uhr

Aufgabe 25 (K)

(a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) \coloneqq \left(\cos x_1 + x_2 - y_1^2 - y_2^2, x_1 - \sin(\pi x_2) - y_1^2 + y_2^2\right).$$

Zeigen Sie, dass durch die Gleichung $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0,0)$ in einer gewissen Umgebung U von $(0,1)$ eine Funktion g mit $g(0,1) = (1,1)$ und

$$f(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) = (0,0) \text{ für alle } (x_1, x_2) \in U$$

impliziert definiert wird, und berechnen Sie die Ableitung $g'(0,1)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$z^5 + xz^3 - 2z^2 + xyz - xy^2 + 3 = 0$$

in einer Umgebung von $(x,y) = (0,1)$ durch $(x, y, g(x,y))$ gelöst werden kann, wobei g in dieser Umgebung stetig differenzierbar ist und zusätzlich $g(0,1) = -1$ gilt. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $(x,y) \mapsto g(x,y)$ die Ableitung $g'(x,y)$ in Termen von x, y und $g(x,y)$. Berechnen Sie zudem explizit $g'(0,1)$.

Aufgabe 26

Zeigen Sie, dass nahe $(x_0, y_0) = (0,0)$ durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u^2 + ve^{-u} + xu &= 1 \\ xy + yv + \frac{u}{v} &= x \end{aligned}$$

zwei Funktionen $u = u(x,y)$ sowie $v = v(x,y)$ eindeutig bestimmt sind.
Berechnen Sie $u_x(0,0), u_y(0,0), v_x(0,0)$ und $v_y(0,0)$.

— bitte wenden —

Aufgabe 27 (K)

(a) Wir definieren $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; f(x,y) := (e^x + e^{-y}, e^{x+y})$.
Zeigen Sie: Es existiert eine offene Umgebung U des Punktes $(0,0)$ und eine offene Umgebung V des Punktes $(2,1)$ so, dass $f|_U\colon U \to V$ bijektiv und die Umkehrfunktion $(f|_U)^{-1} : V \to U$ stetig differenzierbar ist. Berechnen Sie zudem $((f|_U)^{-1})'(2,1)$.

(b) Wir definieren $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; f(x,y) := ((2 + \arctan x)\sin y, -e^x \cos y)$.
Zeigen Sie, dass zu jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung U existiert so, dass $f|_U\colon U \to \mathbb{R}^2$ injektiv ist. Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ injektiv?

Aufgabe 28
Wir definieren $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; f(x,y) := (\cosh(x)\cos(y), \sinh(x)\sin(y))$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt eine offene Umgebung U des Punktes $(\log 2, \frac{\pi}{2})$ und eine offene Umgebung V des Punktes $(0, \frac{3}{4})$ derart, dass f die Menge U bijektiv auf V abbildet und die Umkehrfunktion $(f|_U)^{-1}$ stetig differenzierbar ist. Berechnen Sie zudem $((f|_U)^{-1})'(0, \frac{3}{4})$.

(b) Beweisen Sie, dass f in allen Punkten der Menge $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ lokal invertierbar ist und dass f auf der Menge A nicht injektiv ist.

Klausur
Die schriftliche Prüfung der HM I/II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik findet am 15.09.2015 von 8-10 Uhr (Teil 1) und 11-13 Uhr (Teil 2) statt. Die Anmeldung für die Bachelor-Modulprüfung ist im QISPOS freigeschaltet. Der Anmeldeschluss ist der **1. September 2015**.

Übungsschein
Jede **(K)**-Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer in den Übungsblättern 1-7 und 8-14 **jeweils** mindestens 28 Punkte erzielt.

Anmeldung für den Übungsschein
Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im QISPOS-System (Selbstbedienungsfunktionen für Studierende). Die Prüfungsnummer des Scheins lautet 263. Ohne eine rechtzeitige **Anmeldung bis spätestens 30.06.2015** werden Sie den Schein nicht bekommen, selbst wenn Sie genügend Punkte gesammelt haben!