Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Andreas Hirsch

WS 2014/15
13.02.2015

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

15. Übungsblatt/Ferienblatt

keine Abgabe, wird im SoSe 2015 in der 2. Vorlesungswoche in den Tutorien besprochen

Aufgabe 57
Berechnen Sie jeweils für die 2π-periodische Funktion f die Fourierkoeffizienten und geben Sie an, in welchen Punkten die Funktion auf $[-\pi, \pi]$ durch die zugehörige Fourierreihe dargestellt wird. Hierbei ist f gegeben durch

(a) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \frac{1}{2} \leq |x| \leq \pi, \\ \sqrt{2\pi}, & \text{falls } |x| < \frac{1}{2}. \end{cases}$

(b) $f(x) = |\sin(x)|$ für $x \in [-\pi, \pi]$.

Aufgabe 58
Berechnen Sie die Fourierreihe der Funktion $f(x) = |x|^3$ für $x \in [-2, 2)$ und $f(x+4) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 59

(a) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}$$

für alle $x \in [0, 2\pi]$ gilt.

(b) Begründen Sie, warum durch $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ für $x \in [0, 2\pi]$ eine differenzierbare Funktion gegeben ist. Berechnen Sie dann den Reihenwert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ in Abhängigkeit von $x \in [0, 2\pi]$ und folgern Sie die Identität $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

Hinweis: Bei dieser Aufgabe können Sie auch Beispiel 13.5 aus der Vorlesung benutzen.

Aufgabe 60
Beweisen Sie den aus der Vorlesung bekannten *Satz von Riemann-Lebesgue*:
Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $g \in R(a, b)$. Dann gelten

$$\int_a^b g(x)\sin(nx)dx \to 0 \text{ für } n \to \infty \text{ und } \int_a^b g(x)\cos(nx)dx \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Aufgabe 61
Es seien $l, m, n \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$. Zeigen Sie, dass dann $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ gilt, wobei wir

$$\|A\| := \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{für } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

definieren.

Aufgabe 62

(a) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(i) Ist A offen, so ist $A + B := \{x \in \mathbb{R}^n : x = a + b \text{ mit } a \in A, b \in B\}$ offen.

(ii) Sind A und B abgeschlossen, so ist $A + B$ im Allgemeinen nicht abgeschlossen.

(iii) Ist A abgeschlossen und B kompakt, so ist $A + B$ abgeschlossen.

(iv) Sind A und B kompakt, so ist $A + B$ kompakt.

(b) Es sei $f \in C(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < f(x)\}$ ist offen, (ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq f(x)\}$ ist abgeschlossen.

Aufgabe 63
Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ jeweils auf Beschränktheit, Offenheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit.

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$, (b) $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : \|(x, y)\| \leq 42\}$,

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4, x \leq 3\}$, (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, |x - y| \leq 1\}$.

Aufgabe 64
Ziel dieser Aufgabe ist es zu beweisen, dass die Verkettung zweier Riemann-integrierbarer Funktionen im Allgemeinen nicht wieder Riemann-integrierbar ist. Zeigen Sie also:
Aus $g \in R(0, 1)$ und $f \in R(0, 1)$, wobei $f([0, 1]) \subseteq [0, 1]$ folgt i. A. nicht $g \circ f \in R(0, 1)$.
Zeigen Sie hierfür, dass die in Aufgabe 29 (a) (i) definierte Funktion

$$f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \text{ mit } p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd}, \\ 0, & \text{falls } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

Riemann-integrierbar auf $[0, 1]$ ist und finden Sie ein geeignetes $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ um die Aussage zu beweisen.