Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

SoSe 2016
25.05.2016

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

1. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, 02.05.2016, 12.30 Uhr

Aufgabe 1:
Seien $l, m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$. Zeigen Sie, dass dann $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ gilt, wobei wie in der Vorlesung die Norm definiert wird gemäß

$$\|A\| := \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ für } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (K):
Beweisen oder widerlegen Sie (durch Gegenbeispiel) die folgenden Aussagen: Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei die Menge $A - B \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert durch $A - B := \{a - b :\ a \in A,\ b \in B\}$. Dann gilt:

(a) Falls A und B offen sind, so ist $A - B$ offen.

(b) Falls A offen ist, so ist $A - B$ offen.

(c) Falls A und B abgeschlossen sind, dann ist $A - B$ abgeschlossen.

(d) Falls A abgeschlossen und B kompakt ist, so ist $A - B$ kompakt.

(e) Falls A und B kompakt sind, so ist $A - B$ kompakt.

Aufgabe 3 (K):

(a) Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ jeweils auf Beschränktheit, Offenheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit.

  (i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 4,\ x + y \leq 2\}$

  (ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x - 4)^2 + (y - 1)^2 > 9\}$

(b) Seien $f, g \in C(\mathbb{R})$ und $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ Schnittstellen von f und g, das heißt: $f(x_k) = g(x_k)$ $(k = 1, 2)$. Ferner sei $f(x) > g(x)$ $(x \in (x_1, x_2))$ und $f(x) \leq g(x)$ sonst. Zeigen Sie:

  (i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ g(x) < y < f(x)\}$ ist offen.

  (ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ g(x) \leq y \leq f(x)\}$ ist abgeschlossen.

— bitte wenden —

Aufgabe 4:
Sei $(A^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ eine Folge von Matrizen in $\mathbb{R}^{m\times n}$. Wir definieren $A^{(j)} \to A$ $(j \to \infty)$ genau dann, wenn $\|A^{(j)} - A\| \to 0$ $(j \to \infty)$.
Beweisen Sie: $A^{(j)} \to A$ $(j \to \infty)$ genau dann, wenn für alle $k = 1, .., m$ und $l = 1, .., n$ gilt:

$$a_{kl}^{(j)} \to a_{kl} \qquad (j \to \infty),$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(j)} & \cdots & a_{1n}^{(j)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^{(j)} & \cdots & a_{mn}^{(j)} \end{pmatrix}.$$

Tutorien
Das Ergebnis der Tutorien-Einteilung ist unter

https://webinscribe.ira.uka.de/

abrufbar. Die Tutorien finden ab dem 25.04.2016 statt.

Übungsschein
Jede **(K)**-Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer in den Übungsblättern 1-7 und 8-14 **jeweils** mindestens 28 Punkte erzielt.

Anmeldung für den Übungsschein
Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im entsprechenden Online-Portal. Die genauen Modalitäten werden noch bekannt gegeben.

Modulprüfung
Die Modulprüfung zur Höheren Mathematik I und II für die Fachrichtung Informatik findet als Klausur am 30.08.2016 statt. Details bzgl. der Anmeldefrist werden noch bekanntgegeben.