Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

SoSe 2016
02.05.2016

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

2. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, 09.05.2016, 12.30 Uhr

Aufgabe 1:
Sei $((x_n, y_n))_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (n \geq 1).$$

Berechnen Sie alle Häufungswerte dieser Folge, falls

(a) $x_1 = y_1 = 1$

(b) $x_1 = y_1 = 0$

Aufgabe 2 (K):
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Untersuchen Sie in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Funktion f auf Stetigkeit.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ die Grenzwerte

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{y \to b} f(x,y) \right) \qquad \text{und} \qquad \lim_{y \to b} \left(\lim_{x \to a} f(x,y) \right)$$

existieren. Für welche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ stimmen diese überein?

(c) Skizzieren Sie die Höhenlinien von f (das heißt, die Mengen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$) für einige Werte von $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (K):
An welchen Stellen sind die folgenden Funktionen stetig bzw. unstetig?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \begin{cases} (x+y) \sin\left(\frac{1}{xy}\right) & \text{für } xy \neq 0 \\ 0 & \text{für } xy = 0. \end{cases}$

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) := \begin{cases} \frac{(1-\cos(xy))\sin(xz)}{x^3y^2} & \text{für } xy \neq 0 \\ \frac{z}{2} & \text{für } xy = 0. \end{cases}$

Aufgabe 4:

Beweisen Sie: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig mit $n \geq 1$ und $\overline{U_R(x)}$ die abgeschlossene Kugel um $x \in \mathbb{R}^n$ mit Radius $R > 0$. Dann ist $f(\overline{U_R(x)})$ ein Intervall.