Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

SoSe 2016
16.05.2016

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

4. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, 23.05.2016, 12.30 Uhr

Aufgabe 1 (K):
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3 y \sin\left(\frac{y}{x}\right), & (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0, \\ 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 0. \end{cases}.$$

(a) Bestimmen Sie f_x und f_y.

(b) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ differenzierbar ist.

Aufgabe 2:

(a) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien zweimal stetig differenzierbar und $F(x,y) := f(x + g(y))$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:
$$F_x \cdot F_{xy} = F_y \cdot F_{xx}$$

(b) Bestimmen Sie alle $f \in C^2(\mathbb{R})$ mit

$$f(x + f(y)) = f(x) + f(y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Aufgabe 3 (K):
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f zweimal partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Beweisen Sie $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

(c) Geben Sie eine in $(0,0)$ unstetige zweite partielle Ableitung von f an.

(d) Ist f stetig in $(0,0)$? Ist f differenzierbar in $(0,0)$?

— bitte wenden —

Aufgabe 4:
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nichtkonstante, stetig differenzierbare Funktion und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Beweisen Sie, dass die Funktion

$$w_c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ w_c(t,x) := \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} f(s)\, ds$$

zweimal stetig partiell differenzierbar ist. Zeigen Sie weiter, dass für alle $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Funktion w_c der eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w_c}{\partial t^2}(t,x) = c^2 \frac{\partial^2 w_c}{\partial x^2}(t,x) \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

genügt.