Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

SoSe 2016
30.05.2016

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

6. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, 06.06.2016, 12.30 Uhr

Aufgabe 1:
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 + 3xy - 5y^2$ und $a := \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial a}$ existiert und berechnen Sie diese.

(b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(t) := (\cos(t), \sin(t))$. Zeigen Sie, dass $h := f \circ g$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung.

(c) Zeigen Sie: Für alle (x_1,y_1), $(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\max\{\|(x_1,y_1)\|, \|(x_2,y_2)\|\} \le 1$ gilt:

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \le \sqrt{133}\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|.$$

Aufgabe 2:
Wenden Sie den aus der Vorlesung bekannten Satz von Taylor auf die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \sqrt{x^2 + y^2}$$

an der Stelle $(3,4)$ an und schätzen Sie die Differenz aus der Funktion und ihrer linearen Approximation für $\|(x-3, y-4)\| < 0.1$ ab.

Aufgabe 3 (K):
Es seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x,y) = x^2 - 3xy^2 + 2y^4,\ \ g(t) = (at, bt),$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f \circ g$ in 0 ein lokales Minimum besitzt. Besitzt f in $(0,0)$ ein lokales Minimum?

Aufgabe 4 (K):
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ auf lokale und globale Extrema:

(a) $D = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+y)^3 - 12xy$,

(b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1\}$, $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$.