Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Peter Rupp

SoSe 19
26.04.2019

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

1. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 03.05.2019, 12.30 Uhr

Aufgabe 1:

(a) Es seien reelle Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty, \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$$

gegeben. Beweisen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert und die Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

gilt.*Hinweis:* Cauchy-Schwarz-Ungleichung

(b) Benutzen Sie (a) mit $a_n := 1/n$, $b_n := 1/(n+1)$ um die folgende (gute!) obere Schranke für den goldenen Schnitt zu berechnen:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq \frac{\pi^2}{6}.$$

Aufgabe 2 (K):
Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ offen oder abgeschlossen sind. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < f(x)\}$, mit $f \in C(\mathbb{R})$.

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < f(x)\}$, mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ $(x \in (0,1))$, 0 sonst.

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < f(x)\}$, mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ $(x \in [0,1])$, 0 sonst.

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ y = \sin(1/x)\}$.

Aufgabe 3 (K):

(a) Es sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie, dass der Graph von f, definiert durch

$$\{(x, f(x)) : x \in K\}$$

kompakt ist.

(b) Es sei $(a^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie: $(a^{(k)})$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}^n$, wenn für alle $v \in \mathbb{R}^n$ die Folge $(a^{(k)} \cdot v)_{k=1}^{\infty}$ gegen $a \cdot v$ konvergiert.

(c) Für welche $c \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge $\big((c^n, (1-c)^n)\big)$ in $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4:

Beweisen oder widerlegen Sie (durch Gegenbeispiel) die folgenden Aussagen: Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ und die Menge $A + B$ definiert durch $A + B := \{a + b : a \in A, \ b \in B\}$. Dann gilt:

(a) Falls A und B offen sind, so ist $A + B$ offen.

(b) Falls A offen ist, so ist $A + B$ offen.

(c) Falls A und B abgeschlossen sind, dann ist $A + B$ abgeschlossen.

(d) Falls A abgeschlossen und B kompakt ist, so ist $A + B$ kompakt.

(e) Falls A und B kompakt sind, so ist $A + B$ kompakt.

Übungsblatt

Jeden Freitag erscheint ein Übungsblatt zur schriftlichen Bearbeitung, welches von der Seite

http://www.math.kit.edu/iana2/lehre/hm2info2019s/

heruntergeladen werden kann. Die beiden **(K)**-Aufgaben sollten zur Korrektur abgegeben werden. Werfen Sie die bearbeiteten Aufgaben in die Abgabekästen im Erdgeschoss des Mathematikgebäudes, beim Atriumausgang Richtung Fachschaft. Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und deutlich sichtbar die **Nummer des Tutoriums** sowie den **Namen des Tutors** auf das Deckblatt und *heften* Sie alle Blätter zusammen.
Der späteste Abgabetermin ist dem jeweiligen Übungsblatt zu entnehmen. Normalerweise ist dies um 12:30 Uhr am Freitag der folgenden Woche. Die bearbeiteten Aufgaben werden in den Tutorien zurückgegeben. Nicht abgeholte Blätter liegen im entsprechenden Rückgabekasten neben dem Ausgabekasten der Blätter.

Tutorien

Das Ergebnis der Tutorien-Einteilung ist unter

https://webinscribe.ira.uka.de/

abrufbar. Die Tutorien finden ab dem 29.04.2019 statt.

Übungsschein

Jede **(K)**-Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer in den Übungsblättern 1-7 und 8-14 **jeweils** mindestens 28 Punkte erzielt.

Anmeldung für den Übungsschein

Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal. Diese ist ab sofort und bis zum 28.07.2019 möglich. Spätere Anmeldungen werden nicht berücksichtigt.

Modulprüfung

Die Modulprüfung zur Höheren Mathematik I und II für die Fachrichtung Informatik findet als Klausur im Herbst 2019 statt. Details bzgl. Datum und Anmeldefrist werden noch bekannt gegeben.