Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Peter Rupp

SoSe 19
28.06.2019

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

10. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 05.07.2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 1:
Es seien $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ und

$$B := \{(r\cos(\phi)\cos(\theta), r\sin(\phi)\cos(\theta), r\sin(\theta)) \colon r \in [0,1], \phi \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \theta \in [-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}]\}$$

Berechnen Sie das Volumen von $K \setminus B$.

Aufgabe 2 (K):
Es seien $a, b > 0$ und $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + by^2 \leq 1\}$ und $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := x^2y^2$. Berechnen Sie $\int_E f(x, y)\, d(x, y)$.

Aufgabe 3 (K):
Berechnen Sie das folgende Integral, indem Sie es zunächst in Zylinderkoordinaten transformieren:

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{0}^{4-x^2-y^2} y^2 \, dz dy dx$$

Aufgabe 4
Es sei

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

und

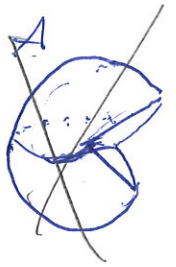
$$f \colon D \to \mathbb{R},\ f(x, y) := x^2 \sin(x^4 + y^4 + 2x^2y^2) + e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Berechnen Sie $\int_D f(x, y)\, d(x, y)$.

Aufgabe: Sei $A := K \setminus B$ wobei

$K := \overline{U_1(0)} \subset \mathbb{R}^3$ und

$$B := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = r\cos\varphi\cos\vartheta,\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta,\ z = r\sin\vartheta \text{ mit } r \in [0,1], \varphi \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \vartheta \in [-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}] \}$$



Bestimme $|A|$.

Bew:

Mit 20.5 folgt zunächst $|A| = |K| - |B|$

Für $|K|$ gilt mit Kugelkoordinaten

$g: [0,1] \times [0,2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to K$ $\quad g(r,\varphi,\vartheta) = (r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$

$$|K| = \int_K 1 \, d(x,y,z) \qquad \text{~~gilt~~ } g([0,1] \times [0,2\pi] \times [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]) = K$$

Transformationssatz

$$= \int_{[0,1] \times [0,2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} |\det g'(r,\varphi,\vartheta)| \, d(r,\varphi,\vartheta)$$

$$= \int_{[0,1] \times [0,2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} r^2 \cos\vartheta \, d(r,\varphi,\vartheta)$$

Fubini

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^2 \, dr \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \, d\vartheta$$

$$= 2\pi \left[\tfrac{1}{3} r^3\right]_0^1 \cdot \left[\sin(\vartheta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\pi$$

Sei $E := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ax^2+by^2 \le 1\}$, mit $a,b>0$, und es sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto x^2y^2$.

<u>Behauptung:</u> $\displaystyle\int_E f\,d(x,y) = \frac{\pi\,(ab)^{3/2}}{24}$.

<u>Beweis:</u> Für $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ gilt $(x,y)\in E \iff \left(\frac{x}{\sqrt a},\frac{x}{\sqrt b}\right) \in \overline{U_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Also ist für $A := \begin{pmatrix}\sqrt a & 0\\ 0 & \sqrt b\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$ die Abbildung $\psi_A: \cancel{\overline{U_1(0)}}\,\mathbb{R}^2 \to \cancel{E}\,\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto A\cdot(x,y)^T = (\sqrt a\,x, \sqrt b\,y)$ bijektiv und $\psi_A(\overline{U_1(0)}) = E$.

Weiter gilt für $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $\psi_A'(x,y) = A$, also $\det\psi_A'(x,y) = \sqrt{ab} > 0$.

Der Transformationssatz aus der Vorlesung besagt also

$$\int_E f\,d(x,y) = \int_{\psi_A(\overline{U_1(0)})} f\,d(x,y) = \int_{U_1(0)} f\circ\psi_A(x,y)\cdot\sqrt{ab}\,d(x,y).$$

Mit der Polarkoordinatentransformation ($\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix}r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\end{pmatrix}$, $(r,\varphi)\in[0,1]\times[0,2\pi]$) und dem Satz von Fubini folgt dann:

$$\int_E f\,d(x,y) = \int_{U_1(0)} \sqrt{ab}\, f\circ\psi_A(x,y)\,d(x,y) = \sqrt{ab}\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} f\circ\psi_A\circ\Phi(r,\varphi)\cdot|\det\Phi'(r,\varphi)|\,d(r,\varphi)$$

$$= \sqrt{ab}\int_0^1\int_0^{2\pi} f(\sqrt a\,r\cos\varphi, \sqrt b\,r\sin\varphi)\cdot r\,\cancel{d(r,\varphi)}\,d\varphi\,dr$$

$$= \sqrt{ab}\int_0^1\int_0^{2\pi} a r^2\cos^2\varphi\; b r^2\sin^2\varphi\; r\,\cancel{d(r,\varphi)}\,d\varphi\,dr$$

$$= \sqrt{ab}^3\left(\int_0^1 r^5\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi\right)$$

$$= \frac{(ab)^{3/2}}{6}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2(2\varphi)}{4}\,d\varphi$$

$$= \frac{(ab)^{3/2}}{6}\int_0^{2\pi}\frac{1-\sin(4\varphi)}{8}\,d\varphi$$

$$= \frac{\pi\,(ab)^{3/2}}{24}.$$

□

(mit $\Psi: [0,1]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$
$\Psi(r,\varphi) := \begin{pmatrix}\sqrt a\,r\cos\varphi\\ \sqrt b\,r\sin\varphi\end{pmatrix}$
kann man auch beide Transformationen auf einmal durchführen)
(also $\Psi = \psi_A\circ\Phi$)