

## Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

### 2. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 10.05.2019, 12.30 Uhr

#### Aufgabe 1:

Es sei  $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ ,  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  und  $((x_n, y_n))_{n=1}^{\infty}$  eine Folge in  $\mathbb{R}^2$  definiert durch:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

- (a) Beweisen Sie folgende Aussage: Falls  $\|A\| < 1$ , so konvergiert  $((x_n, y_n))_{n=1}^{\infty}$  gegen  $(0, 0)$ .
- (b) Es sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Berechnen Sie alle Häufungswerte von  $((x_n, y_n))_{n=1}^{\infty}$ .

#### Aufgabe 2 (K):

Bestimmen Sie alle Punkte  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , in denen die folgende Funktion stetig ist.

(a)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(b)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\exp(x+y-1)-1}{x+y-1}, & x+y \neq 1 \\ 1, & x+y = 1. \end{cases}$

#### Aufgabe 3 (K):

Entscheiden Sie, ob die nachfolgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie diese, falls sie existieren.

(a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x) \sin(y)}{x^2+y^2}$

(b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$

(c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy}$

(d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{xy}$

#### Aufgabe 4:

Es sei  $K := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$  und  $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig. Beweisen Sie, dass  $x_1, x_2 \in K$  existieren, sodass

$$\|f(x_1)\| \leq \|f(x)\| \leq \|f(x_2)\| \quad (x \in K)$$

gilt.