Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Peter Rupp

SoSe 19
17.05.2019

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

4. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 17.05.2019, 12.30 Uhr

Aufgabe 1 (K):
Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen f:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \sqrt{g(x^2, \sin(xz))}$, wobei $g : \mathbb{R}^2 \to (0,\infty)$ differenzierbar ist.

(b) $f : (0,\infty) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \frac{1}{\sqrt{x+\tan^2(y)}}$. Ist f differenzierbar?

Aufgabe 2:
Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \begin{cases} y + x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

differenzierbar, aber nicht stetig partiell differenzierbar ist.

Aufgabe 3 (K):
Beweisen Sie, dass für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

alle Richtungsableitungen in $(0,0)$ existieren. Ist f differenzierbar in $(0,0)$?

Aufgabe 4:
Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(t,x) := \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds$$

zweimal stetig partiell differenzierbar ist. Zeigen Sie weiter, dass die Funktion f der eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x) = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) \qquad ((t,x) \in \mathbb{R}^2)$$

genügt.