Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dr. Peter Rupp

SoSe 19
24.05.2019

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

5. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, 03.06.2019, 08:00 Uhr

Aufgabe 1 (K):
Es seien die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+2y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad g(t) = (t^3 - 2t, \frac{1}{2}t).$$

Zeigen Sie, dass $(f \circ g)'(0) \neq \operatorname{grad} f(g(0)) \cdot g'(0)$ gilt. Warum widerspricht das nicht der Kettenregel?

Aufgabe 2 (K):
Es sei $D = (0,2)^2 \setminus [0,1]^2$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x + \log(x+y)$. Berechnen Sie ein $L > 0$ derart, dass für alle $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in D$ gilt:

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \leq L\,\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\|.$$

Aufgabe 3: Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die Richtungsableitungen in $(0,0)$ bezüglich jeder Richtung, entlang derer sie existiert.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \begin{cases} \frac{y^3 - x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) := \begin{cases} x+y & x \neq 0 \text{ oder } y \neq 0, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$

Sind f, g differenzierbar in $(0,0)$?

Aufgabe 4: Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := x + e^y \sin(z)$. Berechnen Sie alle Richtungsableitungen in $(0,0,0)$. Bestimmen Sie anschließend die Richtung $a_0 \in \mathbb{R}^3$, entlang derer $\frac{\partial f}{\partial a_0}(0,0,0)$ am größten ist, sowie eine Richtung $a_1 \in \mathbb{R}^3$ mit für welche $\frac{\partial f}{\partial a_1}(0,0,0) = 0$ gilt.