Aufgabe: Zeige, dass der Ellipsoid

$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0\}$$

lokal als Graph geschrieben werden kann.

D.h. zu (x_0, y_0, z_0) ex. $g_i : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

sodass $\mathrm{Graph}^{z_0}(g_1) := \{(x, y, g(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathcal{U}\} \subset E$

oder $\mathrm{Graph}^{y_0}(g_2) := \{(x, g(x,z), z) \in \mathbb{R}^3 : x, z \in \mathcal{U}\} \subset E$

oder $\mathrm{Graph}^{x}(g_3) := \{(g(y,z), x, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathcal{U}\} \subset E$

und ~~dass~~ (x_0, y_0, z_0) ist Element einer dieser Graphen. Berechne zudem jeweils die Ableitung von g.

Beweis:

Definiere die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1.$$

f ist diffbar mit $\mathrm{grad} f(x,y,z) = (2x, 4y, 6z)$ und $f^{-1}(\{0\}) = E$. Wir zeigen die Aussage mit Hilfe des Satzes über implizit definierte Funktionen (SIF)

1. Fall ~~$z_0 \neq 0$ (x_0,y_0,z_0)~~ $z_0 \neq 0$ mit $f(x_0, y_0, z_0) = 0$

Es gilt $\left(\det \frac{\partial f}{\partial z}\right)(x_0, y_0, z_0) = 6z_0 \neq 0$.

Nach ~~dem Satz~~ (SIF) ex. $\delta > 0$ und eine Flkt. $g : \mathcal{U}_\delta(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, g(x,y)) = 0 \text{ für alle } (x,y) \in \mathcal{U}_\delta(x_0, y_0)$$

d.h. $\mathrm{Graph}^z(g) \subset E$. Weiter liefert (SIF)

$$g'(x,y) = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))\right)^{-1} \circ \left(\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y,g(x,y))\right)$$

$$= -\frac{1}{6g(x,y)} \cdot (2x, 4y)$$

Problem $z=0$? Dazu betrachte

2. Fall $y \neq 0$

Dann folgt analog mit (S(F)) da

$\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\right) = 4y_0 \neq 0$ es ex. $\delta > 0$ und

$g: U_\delta \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$f(x, g(x,z), z) = 0$ für alle $(x,y,z) \in U_\delta$

also $\mathrm{Graph}^y(g) \subseteq E$

und $g'(x,z) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x,z),z)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x,z)}(x,y,z)$

$$= -\frac{1}{4g(x,z)}(2x, 6z)$$

$y=0$ und $z=0$? Betrachte

3. Fall $x \neq 0$

Wie zuvor folgt mit (S(F)) $\left(\det \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = 2x_0 \neq 0\right)$

da ex. $g: U \to \mathbb{R}$ mit

$f(g(y,z), y, z) = 0$ für alle $(x,y,z) \in U$

und $\mathrm{Graph}^x(g) \subseteq E$. Für die

Ableitung von g gilt

$$g'(y,z) = -\frac{\partial f}{\partial x}(g(y,z),y,z)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial(y,z)}(x,y,z)$$

$$= -\frac{1}{2g(y,z)}(4y\ 6z)$$

Aufgabe 2

Es sei $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ F(x,y,z) := xz + e^{yx} - 2$

Dann ist F stetig db und $(1,0,1) \in \mathbb{R}^3$ ist eine NST von F: $F(1,0,1) = 1 + e^0 - 2 = 0$

Ferner gilt: $\frac{\partial F}{\partial x}(1,0,1) = z + y \cdot e^{xy}\Big|_{(1,0,1)} = 1 + 0 = 1 \neq 0$

Nach dem Satz über implizit definiert Funktionen existieren Umgebungen $U_\delta(0,1)$ und $U_\eta(1)$ ~~derart~~ und genau eine db Fkt g derart, dass

$$xz + e^{yx} - 2 = 0 \iff x = g(y,z)$$

Ferner gilt $g'(0,1) = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}(1,0,1)\ \frac{\partial F}{\partial (y,z)}(1,0,1) = -1 \cdot (xe^{yx}, x)\Big|_{(1,0,1)}$

$$= \underline{\underline{(0,-1)}}$$