$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y(y-2)}{x^2+y^2} - 2y^3 & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Hatten gesehen: $\operatorname{grad}(f) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Dann gilt:

$$\lim_{h \to (0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - h \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{h\to(0,0)} \frac{h_1^2 h_2 (h_2 - 2) - 2h_2^3}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}^3} + \frac{2h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$= \lim_{h \to (0,0)} \frac{h_1^2 h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}^3} \underbrace{- 2h_2 \frac{h_1^2+h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}^3} + \frac{2h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}_{=0}$$

$$= \lim_{h \to (0,0)} \underbrace{\frac{h_1^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}^2}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}_{\leq 1} \cdot h_2 = 0$$

$\Rightarrow$ f ist $(0,0)$ db und $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$