KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. Wolfgang Reichel

WiSe 2018/19
26.02.2019

HÖHERE MATHEMATIK III FÜR DIE FACHRICHTUNGEN ELEKTRO- UND INFORMATIONSTECHNIK

BACHELOR-MODULPRÜFUNG

AUFGABE 1 (10+10=20 PUNKTE)

a) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems auf einem geeigneten Intervall:

$$y' = \sin(x)y^2 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$x^2y'' + 5xy' + 4y = 0, \quad x > 0.$$

Lösung:

a) Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation der Vorlesung sei $I = \mathbb{R}$, $J = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sin(x)$, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y \mapsto y^2$. Eine Stammfunktion von f ist gegeben durch

$$F(x) \quad = \quad \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x \sin(s)\,\mathrm{d}s = -\cos(x) + 1$$

für alle $x \in I$. Eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y(0)}^{y} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_1^y \frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{y} + 1.$$

Laut Vorlesung ergibt sich die Lösung $y : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ nun durch Auflösen der Gleichung $G(y(x)) = F(x)$ nach $y(x)$, also

$$y(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Dabei ist das Intervall I_{x_0} das größte Teilintervall von I mit $y_0 \in I_{x_0}$, auf dem y definiert ist und $y(I_{x_0}) \subseteq J = \mathbb{R}$, also $I_{x_0} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine Eulersche Differentialgleichung. Wir machen deshalb die Substitution $x = e^t$ und setzen $v(t) = y(e^t)$. Dann ist $v'(t) = e^t y'(e^t)$ und

— bitte wenden —

$v''(t) = e^{2t}y''(e^t) + e^t y'(e^t)$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned} & x^2y''(x) + 5xy'(x) + 4y(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & e^{2t}y''(e^t) + 5e^t y'(e^t) + 4y(e^t) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & v''(t) + 4e^t y'(e^t) + 4y(e^t) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & v''(t) + 4v'(t) + 4v(t) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Differentialgleichung (1) für v ist eine lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das zugehörige charakteristische Polynom lautet:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Damit bilden $v_1(t) = e^{-2t}$, $v_2(t) = te^{-2t}$ ein Fundamentalsystem für (1). Damit lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1)

$$v(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$. Die Rücksubstitution $t = \ln(x)$ liefert die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung

$$y(x) = C_1 \frac{1}{x^2} + C_2 \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Aufgabe 2 (10+10=20 Punkte)

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem zum homogenen Problem

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \vec{y}(t).$$

b) Die Matrixexponentialfunktion zu $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie damit die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a) Für das charakteristische Polynom p_A von $A := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ gilt

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4) \qquad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Seine Nullstellen sind also $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$. Wir bestimmen einen Eigenvektor $\vec{v}_1$ zu $\lambda_1 = 2$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als Nächstes ermitteln wir einen Eigenvektor $\vec{v}_2$ zu $\lambda_2 = 4$:

$$A - 4I = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nach der Vorlesung bilden

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_1(t) &= e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \vec{\phi}_2(t) &= e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem $\Phi = \begin{pmatrix} \vec{\phi}_1 & \vec{\phi}_2 \end{pmatrix}$ für $\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t)$.

b) Das gegebene Anfangswertproblem lässt sich schreiben in der Form

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}(t), \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0,$$

mit $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}(t) := \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$ und $\vec{y}_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Laut Vorlesung ist die Lösung dieser inhomogenen Gleichung gegeben durch die "Variation der Konstanten"-Formel

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{y}_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}\vec{b}(\tau)\,d\tau, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Wir setzen die gegebene Matrixexponentialfunktion ein und erhalten

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= e^{tA}\vec{y}_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}\vec{b}(\tau)\,d\tau \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{2(t-\tau)} & (t-\tau)e^{2(t-\tau)} \\ 0 & e^{2(t-\tau)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^\tau \\ e^\tau \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{2t}e^{-\tau} + (t-\tau)e^{2t}e^{-\tau} \\ e^{2t}e^{-\tau} \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t}(1-e^{-t}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2te^{2t} \\ 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei wir die Integrale wie folgt berechnet haben: Einerseits gilt

$$\int_0^t e^{2t}e^{-\tau}\,d\tau = e^{2t}[-e^{-\tau}]_{\tau=0}^{\tau=t} = e^{2t}(1-e^{-t})$$

und mittels partieller Integration ergibt sich

$$\int_0^t \tau e^{-\tau}\,d\tau = \int_0^t e^{-\tau}\,d\tau + [-\tau e^{-\tau}]_{\tau=0}^{\tau=t} = 1 - e^{-t} - te^{-t}.$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}\int_0^t (e^{2t}e^{-\tau} + (t-\tau)e^{2t}e^{-\tau})\,d\tau &= e^{2t}(1+t)\int_0^t e^{-\tau}\,d\tau - e^{2t}\int_0^t \tau e^{-\tau}\,d\tau \\ &= e^{2t}(1+t)(1-e^{-t}) - e^{2t}(1-e^{-t}-te^{-t}) \\ &= te^{2t}.\end{aligned}$$

Eine Probe zeigt, dass $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 2te^{2t} \\ 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$ tatsächlich die gegebene Differentialgleichung löst.

Aufgabe 3 (7+13=20 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) = x^3, & x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x^2, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes eine Lösung $u \in C^2([0,1] \times [0,\infty))$ der eindimensionalen Wellengleichung

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, & (x,t) \in (0,1) \times [0,\infty), \\ u(x,0) = \cos(2\pi x), & x \in [0,1], \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & x \in [0,1], \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Lösung:

a) Es liegt eine eindimensionale Wellengleichung vor. Setzen wir $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^2$, so lautet das gegebene Problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) = x^3 &= f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x^2 &= g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Lösungsformel der eindimensionalen Wellengleichung aus der Vorlesung ergibt sich

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\Big((x+t)^3+(x-t)^3\Big)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} y^2\,dy \\
&= \frac{1}{2}\Big(x^3+3x^2t+3xt^2+t^3+x^3-3x^2t+3xt^2-t^3\Big)+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{y=x-t}^{y=x+t} \\
&= x^3+3xt^2+\frac{1}{6}\Big[x^3+3x^2t+3xt^2+t^3-(x^3-3x^2t+3xt^2-t^3)\Big] \\
&= x^3+x^2t+3xt^2+\frac{1}{3}t^3
\end{aligned}$$

für alle $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Durch eine Probe können wir zudem (leicht) verifizieren, dass die Funktion $u\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $u(x,t) := x^3+x^2t+3xt^2+\frac{1}{3}t^3$ die gegebene Wellengleichung löst.

b) Seien $x\in(0,1)$ und $t>0$. Aus dem Separationsansatz $u(x,t)=v(x)w(t)$ folgt

$$0 \overset{!}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = w''(t)v(x)-w(t)v''(x).$$

Folglich existiert eine Konstante $\lambda\in\mathbb{R}$ mit

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(t)}{w(t)} \equiv \lambda$$

für alle x, t mit $v(x)\neq 0$ und $w(t)\neq 0$. Für v, w ergeben sich damit die Differentialgleichungen

$$w''(t)=\lambda w(t) \quad \text{für alle } t>0, \tag{3}$$

$$v''(x)=\lambda v(x) \quad \text{für alle } x\in(0,1). \tag{4}$$

$\underline{\lambda=0}$: Aus (4) folgt $v(x)=ax+b$ für Konstanten $a,b\in\mathbb{R}$. Wegen $\cos(2\pi x)=u(x,0)=v(x)w(0)=(ax+b)w(0)$ für alle $x\in(0,1)$, erhalten wir einen Widerspruch.

$\underline{\lambda>0}$: Die allgemeine Lösung von (4) ist gegeben durch

$$v(x)=Ae^{\sqrt{\lambda}x}+Be^{-\sqrt{\lambda}x} \quad (x\in(0,1))$$

mit Konstanten $A,B\in\mathbb{R}$. Durch die Randbedingungen ergibt sich:

(i) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0 \rightsquigarrow$ Entweder $w\equiv 0$ (und wir erhalten einen Widerspruch zu $u(x,0)=\cos(2\pi x)$) oder $0\overset{!}{=}v'(0)=\sqrt{\lambda}(A-B)$. Mithin ist $A=B$, d.h. $v(x)=Ae^{\sqrt{\lambda}x}+Ae^{-\sqrt{\lambda}x}=A\left[e^{\sqrt{\lambda}x}-e^{-\sqrt{\lambda}x}\right]$.

(ii) $\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)=0 \rightsquigarrow 0\overset{!}{=}v'(1)=A\sqrt{\lambda}\left[e^{\sqrt{\lambda}}-e^{-\sqrt{\lambda}}\right]$. Der Ausdruck in Klammern ist stets ungleich 0, da $\lambda>0$. Demnach gilt $A=0$ und somit $v\equiv 0$ und $u\equiv 0$. Widerspruch zu $u(x,0)=\cos(2\pi x)$.

$\underline{\lambda<0}$: Die allgemeine Lösung von (4) ist gegeben durch

$$v(x)=A\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right)+B\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) \quad (x\in(0,1))$$

mit Konstanten $A,B\in\mathbb{R}$. Durch die Randbedingungen ergibt sich:

(i) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \rightsquigarrow 0 \overset{!}{=} v'(0) = A\sqrt{-\lambda}. \rightsquigarrow A = 0 \rightsquigarrow v(x) = B\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$.

(ii) $\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \rightsquigarrow 0 \overset{!}{=} v'(1) = -B\sqrt{-\lambda}\sin\left(\sqrt{-\lambda}\right)$. Um eine nichttriviale Lösung zu erhalten, muss daher die Bedingung $\sin\left(\sqrt{-\lambda}\right) = 0$ erfüllt sein, d.h. $\sqrt{-\lambda} \in \{k\pi\colon k \in \mathbb{N}\}$ bzw. $\lambda \in \left\{-k^2\pi^2\colon k \in \mathbb{N}\right\}$.

Demnach soll w die DGl (3) mit $\lambda = -k^2\pi^2$ für ein $k \in \mathbb{N}$ lösen. Die allgemeine Lösung von (3) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} w(t) &= C\sin\left(\sqrt{-\lambda}t\right) + D\cos\left(\sqrt{-\lambda}t\right) \\ &= C\sin(k\pi t) + D\cos(k\pi t) \quad (t > 0) \end{aligned}$$

mit Konstanten $C, D \in \mathbb{R}$ sowie $k \in \mathbb{N}$. Durch die Anfangsbedingungen ergibt sich:

(i) $0 \overset{!}{=} \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v(x)w'(0) = B\cos(k\pi x)\left[Ck\pi\cos(k\pi 0) - Dk\pi\sin(k\pi 0)\right] = BCk\pi\cos(k\pi x)$. Um eine nichttriviale Lösung zu erhalten, muss $B \neq 0$ gelten. Daher folgt $C = 0$ und $w(t) = D\cos(k\pi t)$.

(ii) $\cos(2\pi x) \overset{!}{=} u(x,0) = v(x)w(0) = B\cos(k\pi x)D\cos(k\pi 0) = BD\cos(k\pi x)$. Durch die Wahl $B = D = 1$ und $k = 2$ erhalten wir daher die Lösung

$$u(x,t) := \cos(2\pi x)\cos(2\pi t).$$

Eine Probe zeigt, dass die so definierte Funktion $u \in C^2([0,1] \times [0,\infty))$ tatsächlich eine Lösung von (2) ist.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab dem **24.04.2019**, am Schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 im Mathematik-Gebäude 20.30 aus.

Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, den **02.05.2019**, von 16 bis 18 Uhr im Messtechnik Hörsaal (Geb. 30.33) statt.

Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom **13.05.2019** bis **17.05.2019**.