Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel

SoSe 2019
09.09.2019

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektro- und Informationstechnik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (10+10=20 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung auf dem angegebenen Intervall:

$$y' = \frac{1}{x+1}y + x + 1, \qquad I = (-1, \infty).$$

b) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems auf einem geeigneten Intervall:

$$y' = -\frac{e^{-x}}{y^3} \quad \text{mit} \quad y(0) = \sqrt{2}.$$

Lösung:

a) Es handelt sich um eine lineare inhomogene Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist

$$y_h(x) = Ce^{\int \frac{1}{x+1}dx} = Ce^{\ln(x+1)} = C(x+1) \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Variation der Konstanten liefert eine spezielle Lösung: Wir verwenden den Ansatz $y_p(x) = C(x)(x+1)$ und erhalten

$$C'(x) = 1 \quad \text{bzw.} \quad C(x) = x.$$

Damit ist $y_p(x) = x^2 + x$ eine spezielle Lösung und

$$y(x) = C(x+1) + x^2 + x \quad (C \in \mathbb{R})$$

ist die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

b) Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation der Vorlesung sei $I = \mathbb{R}$, $J = (0, \infty)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto -e^{-x}$, und $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $y \mapsto \frac{1}{y^3}$. Eine Stammfunktion von f ist gegeben durch

$$F(x) \;=\; \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x -e^{-s}\,\mathrm{d}s = e^{-x} - 1$$

für alle $x \in I$. Eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y(0)}^{y} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{\sqrt{2}}^{y} s^3\,\mathrm{d}s = \frac{1}{4}y^4 - 1.$$

— bitte wenden —

Laut Vorlesung ergibt sich die Lösung $y : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ nun durch Auflösen der Gleichung $G(y(x)) = F(x)$ nach $y(x)$, also

$$y(x) = \sqrt[4]{4e^{-x}} = \sqrt{2}e^{-\frac{x}{4}}.$$

Dabei ist das Intervall I_{x_0} das größte Teilintervall von I mit $x_0 \in I_{x_0}$, auf dem y definiert ist und $y(I_{x_0}) \subseteq J = (0, \infty)$, also $I_{x_0} = \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (10+10=20 Punkte)

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem zu folgendem homogenen Problem:

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \vec{y}(t).$$

b) Zeigen Sie, dass die Matrixexponentialfunktion zu $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ durch

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Ermitteln Sie damit die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t) + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a) Für das charakteristische Polynom p_A von $A := \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ gilt

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 12 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda)(6-\lambda) + 24 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2) \qquad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Seine Nullstellen sind also $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$. Wir bestimmen einen Eigenvektor $\vec{v}_1$ zu $\lambda_1 = 0$:

$$A - 0I = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als Nächstes ermitteln wir einen Eigenvektor $\vec{v}_2$ zu $\lambda_2 = 2$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nach der Vorlesung bilden

$$\vec{\phi}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\vec{\phi}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 = e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

ein Fundamentalsystem $\Phi = \begin{pmatrix} \vec{\phi}_1 & \vec{\phi}_2 \end{pmatrix}$ für $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t)$.

b) Wir berechnen die Matrixexponentialfunktion von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ auf zwei verschiedene Weisen.

Variante 1: Definieren wir $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, so gilt $A = I + B$. Außerdem haben wir $B^2 = 0$ und somit auch $B^k = 0$ für $k \geq 2$. Wegen $IB = BI$ folgt

$$e^{tA} = e^{tI}e^{tB} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Variante 2: Induktiv sieht man, dass $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Die zu A gehörende Matrixexponentialfunktion ist daher gegeben durch

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kt^k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

da $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{kt^k}{k!} = t\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = t\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = te^t$.
Das gegebene Anfangswertproblem lässt sich schreiben in der Form

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(t), \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0,$$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}(t) := \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$ und $\vec{y}_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Laut Vorlesung ist die Lösung dieser inhomogenen Gleichung gegeben durch die "Variation der Konstanten"-Formel

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{y}_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}\vec{b}(\tau)\,d\tau, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Wir setzen die gegebene Matrixexponentialfunktion ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\vec{y}(t) &= e^{tA}\vec{y}_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}\vec{b}(\tau)\,d\tau \\
&= \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t-\tau} & (t-\tau)e^{t-\tau} \\ 0 & e^{t-\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2\tau} \\ 0 \end{pmatrix} d\tau \\
&= \begin{pmatrix} (1+t)e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^t e^{-3\tau} \\ 0 \end{pmatrix} d\tau \\
&= \begin{pmatrix} (1+t)e^t \\ e^t \end{pmatrix} + e^t\left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{-3\tau} \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\
&= \begin{pmatrix} (\frac{4}{3}+t)e^t - \frac{1}{3}e^{-2t} \\ e^t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Eine Probe zeigt, dass $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} (\frac{4}{3}+t)e^t - \frac{1}{3}e^{-2t} \\ e^t \end{pmatrix}$ tatsächlich das gegebene Anfangswertproblem löst.

Aufgabe 3 (7+13=20 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + 2\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \cos(x-t), & x,t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \sin(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes $u(x,y) = v(x)w(y)$ eine Lösung $u \in C^2\left([0,1]^2\right)$ des folgenden Randwertproblems:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } (0,1)^2, \\ u(x,0) = 0, & x \in [0,1], \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right), & x \in [0,1], \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, & y \in [0,1], \\ u(1,y) = 0, & y \in [0,1]. \end{cases} \tag{1}$$

Lösung:

a) Es liegt eine eindimensionale Transportgleichung vor. Wir bringen Sie in die korrekte Form um die Lösungsformel aus der Vorlesung anzuwenden:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \underbrace{2}_{=:a} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \cos(x-t) =: g(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) = \sin(x) =: f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Lösungsformel für die Transportgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x-ta) + \int_0^t g(x-(t-\tau)a,\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= f(x-2t) + \int_0^t g(x-2(t-\tau),\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \sin(x-2t) + \int_0^t \cos(x-2(t-\tau)-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \sin(x-2t) + \int_0^t \cos(x-2t+\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \sin(x-2t) + \Big[\sin(x-2t+\tau)\Big]_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &= \sin(x-2t) + \sin(x-t) - \sin(x-2t) \\ &= \sin(x-t) \end{aligned}$$

für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

b) Seien $x,y \in (0,1)$. Aus dem Separationsansatz $u(x,y) = v(x)w(y)$ folgt

$$0 \overset{!}{=} \Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = w(y)v''(x) + w''(y)v(x).$$

Folglich existiert eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$-\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(y)}{w(y)} \equiv \lambda.$$

Für v, w ergeben sich damit die Differentialgleichungen

$$w''(y) = \lambda w(y) \quad \text{für alle } y \in (0,1), \tag{2}$$
$$v''(x) = -\lambda v(x) \quad \text{für alle } x \in (0,1). \tag{3}$$

<u>Sei nun $\lambda > 0$:</u> Die allgemeine Lösung von (3) ist gegeben durch

$$v(x) = A\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) \quad (x \in (0,1))$$

mit Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$.
Durch die Randbedingungen ergibt sich:

(i) $0 = \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = v'(0)w(y) \rightsquigarrow 0 \overset{!}{=} v'(0) = \sqrt{\lambda}A\cos(0) \rightsquigarrow A = 0.$

(ii) $0 = u(1,y) = v(1)w(y) \rightsquigarrow 0 \overset{!}{=} v(1) = B\cos\left(\sqrt{\lambda}\right)$. Um eine nichttriviale Lösung zu erhalten, muss daher die Bedingung $\cos\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$ erfüllt sein, d.h. $\sqrt{\lambda} \in \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi : k \in \mathbb{N}_0\right\}$ bzw. $\lambda \in \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 : k \in \mathbb{N}_0\right\}$. Im Folgenden sei o.B.d.A. $B = 1$.

Demnach soll w die DGl (2) mit $\lambda = \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ lösen. Die allgemeine Lösung von (2) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} w(y) &= C\sinh\left(\sqrt{\lambda}y\right) + D\cosh\left(\sqrt{\lambda}y\right) \\ &= C\sinh\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi y\right) + D\cosh\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi y\right) \quad (y > 0) \end{aligned}$$

mit Konstanten $C, D \in \mathbb{R}$ sowie $k \in \mathbb{N}_0$. Durch die Randbedingungen ergibt sich:

(i) $u(x,0) = 0 \rightsquigarrow 0 \overset{!}{=} w(0) = D$. Mithin ist $w(y) = C\sinh\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi y\right)$,
$w'(y) = C\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\cosh\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi y\right)$.

(ii) $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \overset{!}{=} \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = v(x)w'(1) = C\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x\right)\cosh\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$. Durch die Wahl $C = \frac{2}{\pi\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ und $k = 0$ erhalten wir daher die Lösung

$$u(x,y) := \frac{2}{\pi\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sinh\left(\frac{\pi}{2}y\right).$$

Eine Probe zeigt, dass die so definierte Funktion $u \in C^2\left([0,1]^2\right)$ tatsächlich eine Lösung von (1) ist.
Für $\lambda \leq 0$ können wir leicht zeigen, dass der Separationsansatz keine Lösung liefert.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab dem **14.10.2019**, am Schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 im Mathematik-Gebäude 20.30 aus.

Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, den **17.10.2019**, von 16 bis 18 Uhr im Daimler-Hörsaal (Geb. 10.21) statt.

Die mündlichen Nachprüfungen sind von **21.10.2019** bis **31.10.2019**.

— bitte wenden —