

Nichtlineare Randwertprobleme

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Es seien $\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2$ und $u: \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige radialsymmetrische Funktion, d.h. $u(x) = v(r)$ für ein $v \in C([0, 1])$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

- (a) Zeigen Sie: $u \in C^2(\overline{B_1(0)}) \iff v \in C^2([0, 1])$, $v'(0) = 0$.
- (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $D^2u(x)$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Flächenstücke der Form

$$\mathcal{F} = \{(x_1, x_2, u(x_1, x_2)) : x \in B_1(0)\}, \quad u \text{ radialsymmetrisch}$$

mit

- (a) konstanter mittlerer Krümmung,
- (b) konstanter Gaußscher Krümmung.

Hinweis: Verwenden Sie die Resultate von Aufgabe 1.

Aufgabe 3

Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $u \in C^2(\Omega)$ gegeben. Dann ergibt

$$P: x = (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, u(x_1, x_2))$$

die Parametrisierung einer Fläche F . Die Tangentialebene im Punkt $P = (x_1, x_2, u(x_1, x_2))$ ist gegeben durch

$$T_P F = [X_1, X_2] \text{ mit } X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$

und die zugehörige Normale ist

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dann existieren Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial x_1} &= \alpha X_1 + \beta X_2 + \lambda N \quad \text{sowie} \\ \frac{\partial N}{\partial x_2} &= \gamma X_1 + \delta X_2 + \mu N.\end{aligned}$$

Ferner ist

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = -(g_{ij})^{-1}(h_{ij}) \quad \text{mit}$$
$$g_{ij} = X_i \cdot X_j, \quad h_{ij} = N \cdot \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad \text{für } i, j = 1, 2.$$

Zeigen Sie für die durch $H = \frac{1}{2} \operatorname{spur}(A)$ definierte mittlere Krümmung die Charakterisierung

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right).$$

Organisatorisches

Übungsblätter

- Das neue Übungsblatt gibt es mittwochs in der Übung oder auf der Homepage <http://www.math.kit.edu/iana2/lehre/nichtlinrwp2015w/>
- Keine Abgabe, keine Korrektur.

Bei Fragen

- Sprechstunde: Mittwoch 10:00-11:00, Zimmer 3.026 Kollegengebäude Mathematik (20.30).
- E-Mail: carlos.hauser@kit.edu