Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

WS 2015/16
22.12.2015

Nichtlineare Randwertprobleme

10. Übungsblatt

Aufgabe 24

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein Gebiet sowie u_0 ein kritischer Punkt des Funktionals $J[u] = \int_\Omega L(u', u)\, dx$ mit zugehöriger Lagrange-Funktion $L\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$u_0' \frac{\partial L}{\partial p}(u_0', u_0) - L(u_0', u_0) = \text{const.} \quad \text{in } \Omega.$$

(b) Eine Kette mit konstanter Massendichte m wird an zwei Punkten $(-a, b)$ und (a, b) aufgehängt $(a, b > 0)$. Das zugehörige Variationsproblem, d.h. die Minimierung der potenziellen Energie, ist dann gegeben durch:

$$\text{Minimiere } \int_{-a}^{a} y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

Dabei sei die Kette parametrisiert durch $(x, y(x))$ mit $x \in (-a, a)$. Finden Sie mit Hilfe von (a) die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung.

Aufgabe 25

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $h \in C(\partial\Omega)$. Betrachten Sie das nichtlineare Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + \dfrac{n}{2}\dfrac{|\nabla u|^2}{u} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \hfill u = h & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Finden Sie die zugehörige Lagrange-Funktion und schreiben Sie das Problem in variationeller Formulierung.

Aufgabe 26

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f\colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $F(x,t) := \int_0^t f(x,s)\, ds$. Bestimmen Sie für die gegebenen Funktionale die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen:

(a) $J[u] = \displaystyle\int_\Omega \frac{(\Delta u)^2}{2} - F(x,u)\, dx.$

(b) $J[u] = \displaystyle\int_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{p} - F(x,u)\, dx$ für $1 < p < \infty$.

Wir wünschen Ihnen Frohe Weihnachten,
einen guten Rutsch ins Neue Jahr und
viel Freude an der Mathematik im kommenden Jahr!!