Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

WS 2015/16
13.1.2016

Nichtlineare Randwertprobleme

11. Übungsblatt

Aufgabe 27

Berechnen Sie mittels geeigneter minimierender Folgen das Infimum der folgenden Funktionale über der gegebenen Menge V und zeigen Sie, dass kein Minimierer $u_0 \in V$ existiert:

(a) $J[u] = \displaystyle\int_0^1 u^2(x)\,dx, \quad V = \{u \in C([0,1])\colon u(0) = 0,\, u(1) = 1\}.$

(b) $J[u] = \displaystyle\int_0^1 x^4 (u'(x))^2\,dx, \quad V = \{u \in W^{1,2}(0,1)\colon u(0) = 0,\, u(1) = 1\}.$

Aufgabe 28

(a) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe und monoton wachsende Funktion. Beweisen Sie, dass das Funktional $J\colon X \to \mathbb{R}$, gegeben durch $J[u] = f(\|u\|)$, $u \in X$ konvex ist.

(b) Sei X nun ein reflexiver Banachraum und $V \neq \emptyset$ eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge von X. Weiter seien $p > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in X$ und $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ ein stetiges lineares Funktional. Beweisen Sie, dass das Funktional $J\colon V \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$J[u] = \|u\|^p + \alpha\varphi(u + v), \quad u \in V$$

einen Minimierer $u_0 \in V$ besitzt.

Aufgabe 29

(a) Es sei X ein Banachraum, $V \subset X$ konvex und $J\colon V \to \mathbb{R}$ ein strikt konvexes Funktional, d.h. für alle $u, v \in V$, $t \in (0,1)$ mit $u \neq v$ gilt

$$J[tu + (1-t)v] < tJ[u] + (1-t)J[v].$$

Zeigen Sie, dass J höchstens einen Minimierer besitzt.

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Gegeben sei eine nur von p abhängige Lagrangefunktion $L = L(p)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $L \in C^2(\mathbb{R}^n)$

(ii) $\exists \theta > 0$: $\sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j}(p)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \quad$ für alle $p, \xi \in \mathbb{R}^n$

Weiter sei $J\colon W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$, $J[u] = \int_\Omega L(\nabla u)\,dx$. Zeigen Sie: Es existiert höchstens ein Minimierer von J.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$L(p) \geq L(\tilde{p}) + \frac{\partial L}{\partial p}(\tilde{p}) \cdot (p - \tilde{p}) + \frac{1}{2}\theta|p - \tilde{p}|^2 \quad \text{für alle } p, \tilde{p} \in \mathbb{R}^n.$$