Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

WS 2015/16
20.1.2016

Nichtlineare Randwertprobleme

12. Übungsblatt

Aufgabe 30

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $\lambda > 0$ und $J\colon W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$J[u] = \int_\Omega \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} + \lambda \cos(u) \right) dx.$$

Zeigen Sie:

(a) J ist schwach unterhalbstetig und besitzt einen Minimierer $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

(b) Es existiert ein $\underline{\lambda} > 0$ so, dass $u_0 = 0$ für alle $0 < \lambda < \underline{\lambda}$.

(c) Es existiert ein $\overline{\lambda} > 0$ so, dass $u_0 \neq 0$ für alle $\lambda > \overline{\lambda}$.

Aufgabe 31

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das Funktional $J\colon W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$J[u] = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}(|\nabla u|^2 + |u|^2) + \alpha\sqrt{|u|^2 + 1} - u \right) dx,$$

einen Minimierer $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ besitzt. Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung und zeigen Sie, dass u_0 schwache Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung ist.

Aufgabe 32

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Ferner sei $p \in \left[0, \frac{n+2}{n-2}\right)$ falls $n \geq 3$ und $p \in [0, \infty)$ falls $n = 1, 2$. Betrachten Sie das Funktional $J\colon W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$J[u] = \int_\Omega |u|^{p+1}\, dx,$$

eingeschränkt auf die Menge

$$V = \left\{ u \in W_0^{1,2}(\Omega)\colon \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = 1 \right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\inf\limits_V J = 0$, aber es existiert kein Minimierer.

(b) $\sup\limits_V J < \infty$ und es existiert ein Maximierer.