Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

WS 2015/16
27.1.2016

Nichtlineare Randwertprobleme

13. Übungsblatt

Aufgabe 33

Es seien $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $L\colon X \to \mathbb{R}$ eine konvexe und stetig Fréchet-differenzierbare Abblidung. Zeigen Sie:

(a) $L[x] - L[y] \leq DL(x)[x-y]$ für alle $x, y \in X$.

(b) Ist L strikt konvex, so existiert höchstens ein Punkt $x_0 \in X$ mit $DL[x_0] = 0$ (x_0 heißt kritischer Punkt).

(c) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass es strikt konvexe Funktionale ohne kritische Punkte gibt.

Aufgabe 34

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $0 \leq s_1, s_2 < 1$. Weiter seien Carathéodory-Funktionen $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben mit

$$|f(x,t)| \leq C(1+|t|^{s_1}), \quad F(x,t) := \int_0^t f(x,s)\,ds \quad \text{für alle } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R},$$
$$|g(x,t)| \leq C(1+|t|^{s_2}), \quad G(x,t) := \int_0^t g(x,s)\,ds \quad \text{für alle } (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}.$$

Betrachten Sie das Funktional $J\colon W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$J[u] = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2 + u^2}{2} - F(x,u)\,dx - \oint_{\partial\Omega} G(x,u)\,do.$$

(a) Rechnen Sie formal nach, dass ein Minimierer des gegebenen Funktionals schwache Lösung des folgenden Randwertproblems ist:

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f(x,u) & \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u = g(x,u) & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie, dass das Funktional einen Minimierer besitzt, indem Sie Koerzivität und schwache Unterhalbstetigkeit des Funktionals nachweisen.
Hinweis: Für die schwache Unterhalbstetigkeit vgl. Abschnitt 5.3. und verwenden Sie, dass der Spuroperator $T\colon W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ kompakt ist.

(c) Beweisen Sie die Gâteaux-Differenzierbarkeit von J und folgern Sie, dass jeder Minimierer von J schwache Lösung von $(*)$ ist.
Hinweis: Nutzen Sie Satz 11 sowie dessen Beweis.