Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

WS 2015/16
3.2.2016

Nichtlineare Randwertprobleme

14. Übungsblatt

Aufgabe 35
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $1 < p < \infty$ $(n = 1, 2)$, $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ $(n \geq 3)$. Betrachten Sie das Funktional $J\colon W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$J[u] = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{(\int_\Omega |u|^{p+1} dx)^{\frac{2}{p+1}}}$$

und zeigen Sie, dass J einen Minimierer besitzt. Welche Gleichung erfüllt der Minimierer?

Aufgabe 36
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = |u|^{p-1} u & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie für $1 < p < \infty$ (falls $n = 1, 2$) sowie $1 < p < \frac{n}{n-2}$ (falls $n \geq 3$) die Existenz einer positiven schwachen Lösung $u > 0$ von $(*)$.

Hinweis: Für $1 < q < \infty$ (falls $n = 1, 2$) sowie $1 < q < \frac{2n-2}{n-2}$ (falls $n \geq 3$) ist die Einbettung $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$ kompakt.

(b) Sei nun für $n \geq 3$ zusätzlich $\Omega = B_1(0)$. Zeigen Sie für $1 < p < \infty$ die Existenz einer positiven klassischen, radialsymmetrischen Lösung $u > 0$ von $(*)$, indem Sie die entstehende gewöhnliche Differentialgleichung lösen.