Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

WS 2015/16
28.10.2015

Nichtlineare Randwertprobleme

2. Übungsblatt

Aufgabe 4
Betrachten Sie die nichtlineare Schrödingergleichung

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^2 u = 0.$$

Finden Sie für $\omega > 0$ eine explizite Lösung der Form $u(x,t) = e^{i\omega t} v(x)$ mit $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v > 0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} v(x) = 0 = \lim\limits_{x\to\pm\infty} v'(x)$ sowie $v(x) = v(-x)$.

Aufgabe 5 (Poiseuille Fluss)
Betrachten Sie die Navier-Stokes Gleichungen für das Geschwindigkeitsfeld $u = (u_1, u_2, u_3)$ und den Druck p einer inkompressiblen Flüssigkeit:

$$\begin{cases} \rho(\partial_t u + (u\cdot\nabla)u) - \nu\Delta u + \nabla p = 0, & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ \operatorname{div} u = 0, & \text{in } \Omega \times (0,T). \end{cases}$$

Dabei sei $\Omega = D \times \mathbb{R}$ ein Zylinder mit beschränktem Querschnitt $D \subset \mathbb{R}^2$.
Untersuchen Sie den folgenden Ansatz für eine stationäre Lösung:

$$u(x,y,z,t) = (0,0,v(x,y)), \quad p(x,y,z) = -\alpha z + \beta.$$

Welches Randwertproblem muss $v\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ lösen, damit (u,p) die Navier-Stokes Gleichungen löst und die Flüssigkeit am Rand des Zylinders haftet? Berechnen Sie u, falls Ω ein Kreiszylinder ist.
Hinweise:

i) $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \rho, \nu > 0$ konstant

ii) $(u\cdot\nabla)u = u_1\partial_x u + u_2\partial_y u + u_3\partial_z u$

Aufgabe 6
Betrachten Sie für $L > 0$ die nichtlineare Hängebrückengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + (1+u)^+ - 1 = 0 \quad \text{auf } (0,L)\times\mathbb{R}$$

mit Randwerten

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L,t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Finden Sie alle Lösungen der Form $u(x,t) = v(x)w(t)$ mit $|u| \le 1$.
Hinweis: Wie lautet die Hängebrückengleichung für Funktionen u mit $|u| \le 1$?