Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

WS 2015/16
4.11.2015

Nichtlineare Randwertprobleme

3. Übungsblatt

Aufgabe 7

(a) Sei $f\colon J \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig auf dem Intervall $J \subset \mathbb{R}$ mit Lipschitz-Konstante L. Zeigen Sie: Die Funktion $g\colon J \to \mathbb{R}$, $g(s) := f(s) + Ls$, ist monoton wachsend auf J.

(b) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Sind $\underline{u}, \overline{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ beschränkte Unter- bzw. Oberlösungen mit $\underline{u} \le \overline{u}$, so existiert eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $\underline{u} \le u \le \overline{u}$, sofern:

(i) f lokal Lipschitz-stetig oder

(ii) $f \in C(\mathbb{R})$ monoton wachsend ist.

Aufgabe 8

(a) Es seien $\alpha \in (0,1)$ und $d > 0$. Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u'' = u^\alpha & \text{in } (-d,d), \\ u(-d) = u(d) = 0 \end{cases}$$

mindestens eine positive, zu $x = 0$ symmetrische Lösung hat.

(b) Sei nun $\alpha \in (0,1)$ sowie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Konstruieren Sie für das Problem

$$\begin{cases} -\Delta u = u^\alpha & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

eine Ober- und eine Unterlösung $\overline{u}, \underline{u}$ mit $0 < \underline{u} \le \overline{u}$ in Ω. Zeigen Sie anschließend die Existenz einer Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $\underline{u} \le u \le \overline{u}$.

Hinweise:

(i) Verwenden Sie den Ansatz $\underline{u} = t\varphi_1$ mit $t > 0$ und $\varphi_1 \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\varphi_1 > 0$, ist die erste Dirichlet-Eigenfunktion zu $-\Delta$ auf Ω. Für die Oberlösung ist Teil (a) hilfreich.

(ii) Ersetzen Sie u^α durch $f(u) = u_+^\alpha$ und nutzen Sie, dass f monoton wachsend ist um Aufgabe 7 anzuwenden.