Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

WS 2015/16
11.11.2015

Nichtlineare Randwertprobleme

4. Übungsblatt

Aufgabe 9

Diese Aufgabe ist, in verallgemeinerter Form, eine Fortsetzung von Aufgabe 8.
Es sei $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ stetig, $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ streng monoton fallend für $t > 0$ sowie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

höchstens eine beschränkte Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $u > 0$ in Ω besitzt.
Hinweis: Es ist hilfreich, zunächst die folgende Ungleichung zu beweisen:

$$\int_\Omega |\nabla\psi|^2 dx \geq \int_\Omega \frac{f(u)}{u}\psi^2 dx \quad \forall \psi \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

wobei u eine positive Lösung von $(*)$ sei. Verwenden Sie hierzu die Testfunktion $\varphi = \frac{\psi^2}{u+\varepsilon}$ mit $\varepsilon > 0$ und betrachten Sie anschließend $\varepsilon \to 0^+$. Wählen Sie die Testfunktion $\psi = v$ und vertauschen Sie die Rollen von u und v.

Aufgabe 10

Seien $\Omega := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ und $h \in (0,1)$. Betrachten Sie das finite Differenzen-Problem

$$(**) \qquad \begin{cases} -\Delta_h u = 1 - u^2 & \text{in } \Omega_h, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega_h. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie für $u \in C^4(\mathbb{R}^n)$ mit Hilfe des Satzes von Taylor

$$\Delta_h u(x) = \Delta u(x) + \frac{h^2}{24}\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_i^4}(\xi_i) + \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^4}(\eta_i)\right) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

mit $\xi_i = \xi_i(x) \in \{x + the_i\colon t \in (0,1)\}$ sowie $\eta_i = \eta_i(x) \in \{x - the_i\colon t \in (0,1)\}$.

(b) Nutzen Sie den Ansatz $\overline{u}(x) = \alpha\,(1 - |x|^2)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ sowie Teil (a) um eine Oberlösung von $(**)$ zu finden. Zeigen Sie anschließend die Existenz einer Lösung $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ des finite Differenzen-Problems $(**)$.

Aufgabe 11

Sei $\Omega := B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$. Betrachten Sie das System

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 - u^2 + v^2 \text{ in } \Omega, & u = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \\ -\Delta v = 1 + uv^2 \text{ in } \Omega, & v = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Um positive Lösungen $u > 0$, $v > 0$ zu finden, stellen Sie ein äquivalentes, quasimonotones System auf und lösen Sie dieses, indem Sie eine geeignete Ober- und Unterlösung konstruieren.

Hinweis: Für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist ein Kandidat für eine Oberlösung

$$(\overline{u}(x), \overline{v}(x)) = \left(\alpha \left(1 - |x|^2\right), \beta \left(1 - |x|^2\right)\right).$$