Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

WS 2015/16
18.11.2015

Nichtlineare Randwertprobleme

5. Übungsblatt

Aufgabe 12

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\varphi_1 > 0$ die erste Dirichlet Eigenfunktion zu $-\Delta$ auf Ω und $a, b, s \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = au^+ + bu^- + s\varphi_1 & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei $u^+ = \max\{u, 0\}, u^- = \min\{u, 0\}$. Zeigen Sie zuerst, dass die Funktion $f \colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,t) := at^+ + bt^- + s\varphi_1(x), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

eine Carathéodory-Funktion ist und

$$\min\{a,b\} \leq \frac{f(x,t) - f(x,\tau)}{t - \tau} \leq \max\{a,b\} \qquad \text{für fast alle } x \in \Omega, \text{ für alle } t, \tau \in \mathbb{R}, t \neq \tau.$$

Zeigen Sie damit:

(a) Gilt $a, b < \lambda_1$, so existiert genau eine Lösung. Geben Sie diese Lösung an.
Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $u = c\varphi_1$ mit $c \in \mathbb{R}$ um die Lösung u zu bestimmen.

(b) Gilt $a, b \in (\lambda_i, \lambda_{i+1})$ $(i \in \mathbb{N})$, so existiert genau eine Lösung. Geben Sie diese an.

(c) Gilt $b < \lambda_1 < a$, $s < 0$, so existieren mindestens zwei Lösungen.

(d) Gilt $b < \lambda_1 < a$, $s > 0$, so existiert keine Lösung.

(e) Gilt $b < \lambda_1 < a$, $s = 0$, so existiert genau eine Lösung.

Aufgabe 13

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $g \colon \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Carathéodory-Funktion. Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \qquad \partial_\nu u = g(x,u) & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mindestens eine Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ besitzt. *Hinweise:*

(i) Die schwache Formulierung von

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für $g \in L^2(\partial\Omega)$ ist: Finde $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi \, dx = \oint_{\partial\Omega} g\varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

(ii) Sie können verwenden, dass die Einbettung

$$E\colon \begin{cases} W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\partial\Omega) \\ u \mapsto u \end{cases}$$

kompakt ist.

(b) Zeigen Sie durch direktes Nachrechnen, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u'' + u = 0 & \text{in } (-1,1), \\ \partial_\nu u(x) = \dfrac{1}{1+u(x)^2} & \text{für } x = \pm 1 \end{cases}$$

eine Lösung besitzt.
Hinweis: Probieren Sie eine gerade Funktion u.

(c) Zusätzlich zu den Voraussetzungen in (a) sei nun noch ein beschränkte Carathéodory-Funktion $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Beweisen Sie, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x,u) & \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u = g(x,u) & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mindestens eine Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ besitzt.
Hinweis: Die schwache Formulierung von

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\partial\Omega)$ ist: Finde $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx + \oint_{\partial\Omega} g\varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$