Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

WS 2015/16
25.11.2015

Nichtlineare Randwertprobleme

6. Übungsblatt

Aufgabe 14
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und die Carathéodory-Funktion $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erfülle

$$|f(x, z_1, p_1) - f(x, z_2, p_2)| \le L_1|z_1 - z_2| + L_2|p_1 - p_2|$$

für alle $x \in \Omega$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$. Ferner sei $(z_0, p_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit $f(\cdot, z_0, p_0) \in L^2(\Omega)$. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f(x, u, \nabla u) & \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

(a) Formulieren Sie $(*)$ als Fixpunktproblem in $W^{1,2}(\Omega)$.

(b) Geben Sie Bedingungen für L_1, L_2 an, sodass $(*)$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ besitzt.

Aufgabe 15
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Carathéodory-Funktion. Für die Matrixfunktion $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ gelte

(i) $a_{ij} = a_{ji}\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Carathéodory-Funktion für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

(ii) Es gibt ein $\beta > 0$ mit $|a_{ij}(x, s)| \le \beta$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}, x \in \Omega, s \in \mathbb{R}$.

(iii) Es existiert ein $\alpha > 0$ mit $\alpha I_{\mathbb{R}^{n\times n}} \le A(x, s)$ für alle $x \in \Omega, s \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u) = f(x, u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ besitzt.