Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

WS 2015/16
2.12.2015

Nichtlineare Randwertprobleme

7. Übungsblatt

Aufgabe 16

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet, $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und nach x stetig differenzierbar sowie $F(x,t) := \int_0^t f(x,s)\,ds$. Weiter sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine klassische Lösung des Randwertproblems

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung der Pohozaev-Identität:

$$\int_\Omega nF(x,u) + x \cdot \nabla_x F(x,u)\,dx = \frac{n-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 (x\cdot\nu)\,do$$

(b) Für $\alpha > 1$ sei nun $f(x,u) := |x|^\alpha |u|^{p-1}u$ und Ω zusätzlich sternförmig bezüglich 0 sowie $n \geq 3$. Zeigen Sie, dass $(*)$ keine nichttriviale Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega})$ besitzt, falls $p > \frac{n+2\alpha+2}{n-2}$.

Aufgabe 17

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet, $F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, F\colon (u,v) \mapsto F(u,v)$ stetig differenzierbar mit $F(0,0) = 0$. Weiter sei $(u,v) \in \left(C^2(\overline{\Omega})\right)^2$ eine klassische Lösung des Systems

$$(**) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \\ -\Delta v = \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) \text{ in } \Omega, \quad v = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie die folgende verallgemeinerte Pohozaev-Identität:

$$\int_\Omega nF(u,v)\,dx = \frac{n-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\,dx + \frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)^2\right](x\cdot\nu)\,do$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst $\operatorname{div}\left(x\frac{|\nabla u|^2}{2} + x\frac{|\nabla v|^2}{2} - (x\cdot\nabla u)\nabla u - (x\cdot\nabla v)\nabla v\right)$.

(b) Für $\alpha, \beta > 1$ sei nun $F(u,v) := u_+^\alpha v_+^\beta$ und Ω zusätzlich sternförmig sowie $n \geq 3$. Zeigen Sie, dass die einzige Lösung $(u,v) \in \left(C^2(\overline{\Omega})\right)^2$ von $(**)$ die Nulllösung ist, falls $\alpha + \beta > \frac{2n}{n-2}$.

— bitte wenden —

Aufgabe 18
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet, $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F\colon (u,v) \mapsto F(u,v)$ stetig differenzierbar mit $F(0,0) = 0$. Weiter sei $(u,v) \in \left(C^2(\overline{\Omega})\right)^2$ eine klassische Lösung des Systems

$$(***) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \\ -\Delta v = \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) \text{ in } \Omega, \quad v = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie die folgende verallgemeinerte Pohozaev-Identität:

$$\int_\Omega nF(u,v)\,dx = \int_\Omega (n-2)\nabla u \cdot \nabla v\,dx + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial v}{\partial \nu}(x \cdot \nu)\,do$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst $\operatorname{div}\left(x(\nabla u \cdot \nabla v) - (x \cdot \nabla u)\nabla v - (x \cdot \nabla v)\nabla u\right)$.

(b) Für $n \geq 3$ seien nun $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} < \frac{n-2}{n}$ und $F(u,v) := \frac{u^{p+1}}{p+1} + \frac{v^{q+1}}{q+1}$ sowie Ω zusätzlich sternförmig. Zeigen Sie, dass die einzige Lösung $(u,v) \in \left(C^2(\overline{\Omega})\right)^2$ von $(***)$ mit $u, v \geq 0$ die Nulllösung ist.