Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

WS 2015/16
9.12.2015

Nichtlineare Randwertprobleme

8. Übungsblatt

Aufgabe 19

1971 publizierte James Serrin im Archive for Rational Mechanics and Analysis (Volume 43, Number 4) in seinem Artikel "A Symmetry Problem in Potential Theory" u.a. den folgenden Satz:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$ und $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung des überbestimmten Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega, \\ u = 0, \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = c & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

($c < 0$ konstant). Dann ist Ω eine Kugel mit Radius $-nc$ und $u(x) = \frac{1}{2n}((nc)^2 - |x - x_0|^2)$, ($x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig).
In seinem Beweis wird die Methode der Spiegelungen an Hyperebenen benutzt.
In der gleichen Ausgabe dieses Journals, direkt im Anschluss an Serrins Artikel, veröffentlichte Hans F. Weinberger einen weiteren Beweis des obigen Satzes (" Remark on the preceding paper of Serrin "). Er zeigt dabei zunächst, dass die Lösung u die oben genannte Form haben muss und folgert daraus, dass Ω eine Kugel ist.
Wir werden im Folgenden den Beweis von Weinberger nachvollziehen:

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Pohozaev-Identität:

$$c^2 n|\Omega| = (n+2)\int_\Omega u\,dx.$$

(b) Beweisen Sie, dass $|\nabla u|^2 + \frac{2}{n}u$ subharmonisch in Ω ist. Mit Hilfe des Maximumprinzips und (a) können Sie nun zeigen, dass $|\nabla u|^2 + \frac{2}{n}u \equiv c^2$ in Ω gilt.

(c) Zeigen Sie, dass die Lösung u von der Form $u(x) = \frac{1}{2n}(R^2 - |x-x_0|^2)$ ist und bestimmen Sie R.

Aufgabe 20

Sei $q \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ mit $x \cdot \nabla q \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$. Ferner sei $0 \not\equiv u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \cap C^1(\mathbb{R}^3)$, wobei $x \mapsto |u(x)|$ sowie $x \mapsto |\nabla u(x)|$ für $|x| \to \infty$ exponentiell fallend sind. Wir nennen u eine Eigenfunktion des Schrödinger-Operators $-\Delta + q(x)$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, falls

$$-\Delta u + q(x)u = \lambda u \quad \text{in } \mathbb{R}^3.$$

(a) Zeigen Sie ausgehend von der Pohozaev-Identität in differentieller Form: u erfüllt das sogenannte Virial-Theorem

$$\int_{\mathbb{R}^3} 2|\nabla u|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} (x \cdot \nabla q) u^2 \, dx.$$

(b) Für eine Konstante $c > 0$ sei das Potential $q \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ nun gegeben durch

$$q(x) := -\frac{c}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass keine Eigenwerte $\lambda \geq 0$ existieren.