Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2015/16
Institut für Analysis 16.12.2015
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

Nichtlineare Randwertprobleme

9. Übungsblatt

Aufgabe 21
Beweisen Sie, dass die Aussage in Satz 8 (Gidas-Ni-Nirenberg) auch dann noch gültig ist, falls die Voraussetzung $u > 0$ in $B_1(0)$ ersetzt wird durch $u \geq 0$, $u \not\equiv 0$ in $B_1(0)$ und zusätzlich $f(0) \geq 0$ gilt.

Aufgabe 22
Für $p > 2$ sei die Funktion $w \in C^2(\mathbb{R}^n)$ gegeben durch $w(x) = (1 - |x|^2)^p$ für $|x| \leq 1$ und $w(x) = 0$ für $|x| > 1$. Weiter sei $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(t) = -4p(p-1)t^{1-2/p} + 2p(n + 2p - 2)t^{1-1/p}$. Zeigen Sie:

(a) w ist eine Lösung des Problems

$$\begin{cases} -\Delta w = f(w) & \text{in } B_1(0), \\ \quad w = 0 & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases}$$

(b) f ist lokal Hölder-stetig zum Exponenten $1 - \frac{2}{p}$.

(c) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $|x_0| = 3$. Dann ist $u := w + w(\cdot - x_0) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } B_5(0), \\ \quad u = 0 & \text{auf } \partial B_5(0). \end{cases}$$

Vergleichen Sie mit Satz 8 aus der der Vorlesung und Aufgabe 21.

Aufgabe 23
Für $0 < R_1 < R_2$ sei $\Omega := B_{R_2}(0) \setminus \overline{B_{R_1}(0)}$ eine offene Kugelschale sowie $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f' < \lambda_1$. Hierbei bezeichnet λ_1 den ersten Dirichlet-Eigenwert von $-\Delta$ auf Ω. Zeigen Sie: Ist $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

so ist u radialsymmetrisch.

Weihnachts-Challenge
Die Aussage aus Aufgabe 23 stimmt auch, falls $f' < \lambda_2$.