Institut für Analysis
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Prof. Dr. Wolfgang Reichel

Nichtlineare Randwertprobleme – Wintersemester 2015/2016

Handout Funktionalanalysis

Definition 1 (Banach-Raum) *Ein Paar $(X, \|\cdot\|)$ heisst normierter Raum, falls X ein Vektorraum über dem Köper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ist und falls gilt*

(i) $\|x\| \geq 0$ *für alle* $x \in X$ *und* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *für alle* $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *für alle* $x, y \in X$.

Für eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X und ein Element $x \in X$ sagt man

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k$$

falls $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0$. x heisst dann Grenzwert der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heisst Cauchy-Folge, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $K_0 = K_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit der Eigenschaft: aus $k, l \geq K_0$ folgt $\|x_k - x_l\| \leq \epsilon$.

Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heisst Banach-Raum, falls jede Cauchy-Folge in X einen Grenzwert in X besitzt.

Definition 2 (Dualraum) *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über dem Körper $\mathbb{K}$. Ein lineares Funktional $\phi : X \to \mathbb{K}$ heisst beschränkt, falls*

$$\|\phi\| := \sup_{x\neq 0} \frac{|\phi(x)|}{\|x\|} < \infty.$$

Die Menge $X^* = \{\phi : X \to \mathbb{K}$ linear, beschränkt$\}$ heisst Dualraum von X. Zusammen mit der obigen Norm $\|\cdot\|$ ist X^* selbst ein Banach-Raum.

Satz 3 (Hahn-Banach) *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $V \subset X$ ein linearer Unterraum. Ist $\phi \in V^*$, dann gibt es ein Funktional $\psi \in X^*$ mit $\psi|_V = \phi$ und $\|\psi\| = \|\phi\|$. Mit anderen Worten: ϕ kann zu einem beschränkten linearen Funktional ψ auf X unter Erhaltung der Norm fortgesetzt werden.*

Definition 4 (Bidualraum, reflexive Räume) *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $X^{**} = (X^*)^*$ sei der Bidualraum. Dann gibt es eine injektive Abbildung $I : X \to X^{**}$ mit $\|I(x)\| = \|x\|$ mit dem Namen* kanonische Injektion*, die definiert ist durch*

$$I : \begin{cases} X & \to & X^{**} \\ z & \mapsto & I(z), \end{cases} \quad \textit{wobei } I(z) \textit{ gegeben ist durch } I(z)\phi := \phi(z)$$

Der Raum X heisst reflexiv*, falls die Abbildung I bijektiv ist. In diesem Fall schreibt man $X = X^{**}$.*

Beispiele: Hilbert-Räume und $L^p(\Omega)$, $W^{k,p}(\Omega)$ für $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ sind reflexiv. $L^1(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega)$ sind im allgemeinen nicht reflexiv.

Definition 5 (Separable Räume) *Ein normierter Raum* $(X, \|\cdot\|)$ *heisst separabel, falls eine abzählbare dichte* $M \subset X$ *existiert, d.h.* $\overline{M} = X$.

Beispiele: $C(\overline{\Omega})$, falls $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist und $L^p(\Omega)$ falls $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar ist, sind separabel. $L^\infty(\Omega)$ ist im allgemeinen nicht separabel.

Definition 6 (Kompakte Mengen) *Sei* $(X, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum und* $A \subset X$. *Die Menge* $A \subset X$ *heisst (folgen-)kompakt, falls jede Folge in* A *eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in* A *besitzt.*

Bemerkung: In metrischen Räumen ist Folgenkompaktheit äquivalent zur folgenden Definition der Kompaktheit: jede offene Überdeckung von A besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

Satz 7 (Kompaktheit und Endlichdimensionalität) *Sei* $(X, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum. Dann ist* $\overline{B_1(0)} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ *kompakt genau dann wenn* X *endlichdimensional ist.*

Definition 8 (schwache, schwach* Konvergenz) *Sei* $(X, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum und* X^* *sein Dualraum.*

(i) Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* X *heisst schwach konvergent gegen* $x \in X$, *falls*

$$\phi(x_k) \to \phi(x) \text{ für } k \to \infty \text{ für alle } \phi \in X^*. \text{ Notation: } x_k \rightharpoonup x \text{ für } k \to \infty.$$

(ii) Eine Folge $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* X^* *heisst schwach* konvergent gegen* $\phi \in X^*$, *falls*

$$\phi_k(x) \to \phi(x) \text{ für } k \to \infty \text{ für alle } x \in X. \text{ Notation: } \phi_k \rightharpoonup^* \phi \text{ für } k \to \infty.$$

Definition 9 (schwache/schwach* Folgenkompaktheit) *Sei* $(X, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum und* X^* *sein Dualraum.*

(i) Eine Menge $M \subset X$ *heisst schwach folgenkompakt, falls jede Folge in* M *eine schwach konvergente Teilfolge mit Grenzwert in* M *besitzt.*

(ii) Eine Menge $M \subset X^*$ *heisst schwach* folgenkompakt, falls jede Folge in* M *eine schwach* konvergente Teilfolge mit Grenzwert in* M *besitzt.*

Satz 10 (Banach-Alaoglu)

(i) Sei X *separabel. Dann ist* $\overline{B_1(0)} \subset X^*$ *schwach* folgenkompakt.*

(ii) Sei X *reflexiv. Dann ist* $\overline{B_1(0)} \subset X$ *schwach folgenkompakt.*

Korollar 11

(i) Sei X *separabel und* $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine beschränkte Folge von Funktionalen in* X^*. *Dann besitzt* $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine schwach* konvergente Teilfolge.*

(ii) Sei X *reflexiv und* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine beschränkte Folge in* X. *Dann besitzt* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine schwach konvergente Teilfolge.*