$\boxed{\text{Weihnachts-Challenge}}$

① $K: \begin{cases} L^2 \to W_0^{1,2} \\ f \mapsto u \end{cases}$ sei Lösungsoperator zu $\begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{array}$

$\mathcal{U}_1 := L^2_{rad}(\Omega) = \{u : u(Ax) = u(x)\ \forall A \in O(n) \text{ und für fast alle } x \in \Omega\}$

$\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_1^{\perp}$

Beh: $K: \mathcal{U}_i \to W_0^{1,2} \cap \mathcal{U}_i \quad , i = 1,2$

Bew 1) Sei $f \in \mathcal{U}_1$ und $u = Kf$. Wähle $A \in O(n)$ und definiere $V(x) := u(Ax)$. V löst $\begin{cases} -\Delta V = f(Ax) = f(x) \text{ in } \Omega \\ V = 0 \quad \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$

d.h. $V = Kf$. Also $u \in \mathcal{U}_1$.

2) Sei $f \in \mathcal{U}_2$ und $g \in C^\alpha(\bar\Omega) \cap \mathcal{U}_1$ und $\varphi = Kg$. Dann ist $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar\Omega) \cap \mathcal{U}_1$ und

$$\int_\Omega u g\,dx = \int_\Omega -u\Delta\varphi\,dx = \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi\,dx = \int_\Omega \underset{\mathcal{U}_2}{f}\ \underset{\mathcal{U}_1}{\varphi}\,dx = 0$$

d.h. $u \perp g$. Da $C^\alpha(\bar\Omega) \cap \mathcal{U}_1$ dicht liegt in $\mathcal{U}_1$ folgt $u \in \mathcal{U}_1^{\perp} = \mathcal{U}_2$. ∎

② $K: \mathcal{U}_i \to \mathcal{U}_i$ kompakt, $i = 1,2$. d.h. $\exists$ ONB $\mathcal{B}_i$ von $\mathcal{U}_i$ aus Eigenfunktionen von $-\Delta$. $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ ist ONB von L^2.

③ Sei $\nu < \lambda_2$. $\forall f \in \mathcal{U}_2\ \exists_1\ \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap \mathcal{U}_2 : \begin{cases} (-\Delta - \nu)\varphi = f \text{ in } \Omega \\ \varphi = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$

$\tilde K: \mathcal{U}_2 \to \mathcal{U}_2$ stetig

$\|\tilde K\| = \dfrac{2}{\lambda_2 + \varepsilon + L}$

<u>Beweis:</u> $(Id - \nu K)\varphi = Kf$ lösbar auf U_2

$\Leftrightarrow$ $(Id - \nu K)\Psi = 0$ hat nur Null-Lösung auf U_2

<u>1. Fall</u> $\nu \neq \lambda_1$: klar

<u>2. Fall</u> $\nu = \lambda_1$: dann ist $\Psi \in [\varphi_1] \subset U_1$, d.h. homogene Gleichung hat in U_2 nur triviale Lösung. ∎

Norm von $\tilde{K}$: Prop 3, Kap 3.

<u>Nun zum eigentlichen Beweis:</u> Sei $u_0 \in C^1(\bar{\Omega})$ klass. Lösung.

O.B.d.A. $-L \leq f'(s) \leq \lambda_2 - \varepsilon$. Setze $\nu := \frac{\lambda_2 - \varepsilon - L}{2}$

und $g(t) = f(t) - \nu t$, $t \in \mathbb{R}$.

$$G: \begin{cases} L^2 \to L^2 \\ u \mapsto g(\cdot; u) \end{cases}$$

$G: U_1 \to U_1$
und $\|G(u) - G(v)\|_{L^2} \leq \frac{\lambda_2 - \varepsilon + L}{2} \|u - v\|_{L^2}$
(vgl. Satz 4, Kapitel 3.1.)

$P: L^2 \to U_1$
$Q: L^2 \to U_2$ Orthogonalprojektionen.

Betrachte jetzt $\begin{cases} -\Delta u_0 - \nu u_0 = g(u_0) & \Omega \\ u_0 = 0 & \partial\Omega \end{cases}$

$u_1 = Pu_0$, $u_2 = Qu_0$, $u_0 = u_1 + u_2$.

$$u_2 = KQG(u_0) = KQG(u_1 + u_2)$$

<u>Beh:</u> $u_1 \in U_1$ fest. $\Phi: \begin{cases} U_2 \to U_2 \\ w \mapsto KQG(u_1 + w) \end{cases}$ hat Lip-Konstante < 1.

$$\| KQb(u_1+w) - KQb(u_1+\tilde{w}) \|_2$$

$$\leq \|K\| \underbrace{\|Q\|}_{\leq 1} \| b(u_1+w) - b(u_1+\tilde{w}) \|_2 \leq \underbrace{\frac{2}{\lambda_1+\varepsilon+L} \cdot \frac{\lambda_2-\varepsilon+L}{2}}_{<1} \|w-\tilde{w}\|_2$$

Folglich: $\forall u_1 \in \mathcal{U}_1$ fest hat die Gleichung

$$w = KQb(u_1+w)$$

genau eine Lösung. Diese ist $w=0$, denn

$$b(u_1) \in \mathcal{U}_1 \quad Qb(u_1)=0.$$

Also ist $u_2 = 0$ und $u = u_1 \in \mathcal{U}_1$ radialsymmetrisch.