Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Rainer Mandel
M.Sc. Kevin Drescher

1. Übungsblatt

Nichtlineare Randwertprobleme

Wintersemester 2021/22

19. Oktober 2021

Aufgabe 1 (Brachistochrone):
Es seien $x_B > 0$ und $y_B > 0$. In der Vorlesung wurde das folgende Randwertproblem hergeleitet:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)(1+y'(x)^2)}}\right) + \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{2y(x)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \text{für } x \in (0, x_B),$$
$$y(0) = 0, \quad y(x_B) = y_B.$$

Zu untersuchen ist die Lösbarkeit dieses Randwertproblems:

(i) Zeigen Sie, dass sich die Differentialgleichung vereinfacht zu

$$2y''(x)y(x) + y'(x)^2 + 1 = 0.$$

(ii) Zeigen Sie: Multiplizieren der Differentialgleichung in (i) und Aufintegrieren ergibt $y(x)(y'(x)^2+1) = c$ für ein $c > 0$. Für welche Daten x_B, y_B ist das RWP lösbar?

(iii) Eine parametrische Lösung ist gegeben durch $y(X(\vartheta)) = Y(\vartheta)$ mit Funktionen X und Y. Finden Sie eine solche parametrische Lösung. Sie können den Ansatz $\tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{X'(\vartheta)}{Y'(\vartheta)}$ verwenden. Ist das RWP nun für alle Daten x_B, y_B lösbar?

Aufgabe 2 (Minimalflächengleichung):
Gegeben sei die Minimalflächengleichung

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)(x,y) = 0.$$

Bestimmen Sie alle Lösungen der Minimalflächengleichung der Form

(i) $u(x,y) = f(x) + g(y)$,

(ii) $u(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.