Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Rainer Mandel
M.Sc. Kevin Drescher

3. Übungsblatt

Nichtlineare Randwertprobleme

Wintersemester 2021/22

2. November 2021

Aufgabe 6:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet und $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ mit $|f(x,z)| \le C(|z|^p + 1)$ für $0 < p < 1, C > 0$ und alle $z \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das nichtlineare Randwertproblem

$$-\Delta u = f(x,u) \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Weiter sei $D := \{u \in L^2(\Omega) \colon \|u\|_{L^2(\Omega)} \le \rho\}$ für ein $\rho > 0$. Zeigen Sie, dass der Operator $T \colon D \to D, u \mapsto (-\Delta)^{-1}(f(\cdot,u))$ stetig und kompakt ist, um den Beweis der Existenz einer schwachen Lösung obigen RWPs zu schließen (vgl. Satz 3.7).

Aufgabe 7:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit $C^{1,1}$-Rand $\partial\Omega$. Weiter sei $b \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und $\mu > 0$. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-\Delta u + b(\nabla u) + \mu u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Zeigen Sie: Ist $\mu > 0$ genügend groß, so existiert eine Lösung $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ des RWPs.
Hinweis: b erfüllt die Wachstumsbedingung $|b(p)| \le C(|p| + 1)$ für eine Konstante C und alle $p \in \mathbb{R}^N$.