

4. Übungsblatt

Nichtlineare Randwertprobleme

Wintersemester 2021/22
9. November 2021

Aufgabe 8:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ beschränkt und messbar, $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Carathéodory-Funktion und es gelte $|f(x, z)| \leq C(a(x) + |z|^{p/q})$ für ein $C > 0$ und $a \in L^q(\Omega)$, wobei $q = 1$. Weiter sei für fast alle $x \in \Omega$ die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto f(x, z)$ stetig differenzierbar mit $|f_z(x, z)| \leq D(b(x) + |z|^{p/q-1})$ für ein $D > 0$, $b \in L^{p'}(\Omega)$ und $1 \leq p \leq \frac{2N}{N-2}$, falls $N \geq 3$ und $1 \leq p < \infty$, falls $N \in \{1, 2\}$, wobei p' der zu p duale Hölder-Exponent ist. Zeigen Sie, dass das Funktional

$$I: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_{\Omega} f(x, u(x)) \, dx$$

Fréchet-differenzierbar ist mit Ableitung

$$I'(u): H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad h \mapsto \int_{\Omega} f_u(x, u(x))h(x) \, dx.$$

Aufgabe 9:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet und die stetige Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} g(t) > -\infty \quad \text{und} \quad |g(t)| \leq C(1 + |t|^{r-1})$$

für $1 \leq r < \frac{2N}{N-2}$ ($N \geq 3$) bzw. $1 \leq r < \infty$ ($N \in \{1, 2\}$). Weiter gelten für die stetige Funktion $a: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ folgende Bedingungen:

- (i) a ist monoton, d.h. für alle $p, q \in \mathbb{R}^N$ gilt $(a(p) - a(q)) \cdot (p - q) \geq 0$,
- (ii) Es gibt eine Konstante $C > 0$ mit $|a(p)| \leq C(1 + |p|)$ für alle $p \in \mathbb{R}^N$.
- (iii) Es existieren $\delta > 0, \mu \in \mathbb{R}$, sodass für alle $p \in \mathbb{R}^N$ gilt: $a(p) \cdot p \geq \delta |p|^2 - \mu$.

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-\operatorname{div}(a(\nabla u)) + g(u) = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{1}$$

in schwacher Formulierung. Zeigen Sie: für jedes $f \in L^2(\Omega)$ existiert eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des obigen RWPs. *Hinweis:* Orientieren Sie sich an den Monotoniemethoden nach Minty / Browder.