Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Rainer Mandel
M.Sc. Kevin Drescher

5. Übungsblatt

Nichtlineare Randwertprobleme

Wintersemester 2021/22

16. November 2021

Aufgabe 10:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet und λ_1 bezeichne den ersten Eigenwert des Dirichlet-Laplace auf Ω.

(i) Weiter sei $f \in C^1([0,\infty))$ eine beschränkte Funktion mit $f(0) = 0$ und $f'(0) > \lambda_1$. Zeigen Sie mit der Methode der Ober- und Unterlösungen die Existenz einer Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des RWPs

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

mit $u > 0$ in Ω.

(ii) Betrachten Sie für $c > 0$ das RWP

$$\begin{cases} -\Delta u = (c-u)u & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

Zeigen Sie: für alle $c > \lambda_1$ existiert eine positive und beschränkte Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$, für $c \leq \lambda_1$ existiert keine nichttriviale Lösung mit $u \geq 0$ in Ω.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass zu λ_1 eine Eigenfunktion $\omega \in H_0^1(\Omega)$ existiert mit $\omega > 0$ in Ω.

Aufgabe 11:
Es sei $f \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ und betrachten Sie die Funktionen

$$F(x,z) := \int_0^z f(x,t)\,dt \quad \text{und} \quad G(x,z) := \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x,z).$$

Weiter seien $F(\cdot,u), G(\cdot,u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ und $u \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$ eine klassische Lösung von

$$-\Delta u = f(x,u) \quad \text{in } \mathbb{R}^N.$$

Beweisen Sie die folgende Version der *Pohozaev-Identität*:

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(NF(x,u(x)) + G(x,u(x))\right)dx.$$

Aufgabe 12:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, ein sternförmiges C^1-Gebiet und $p, q > 0$ mit

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} < \frac{N-2}{N}.$$

Zeigen Sie, dass dann das folgende System

$$\begin{aligned} \Delta u + v^p &= 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ \Delta v + u^q &= 0 \quad \text{in } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

keine positive Lösung besitzt.