Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Rainer Mandel
M.Sc. Kevin Drescher

6. Übungsblatt

Nichtlineare Randwertprobleme

Wintersemester 2021/22

23. November 2021

Aufgabe 13:
Es sei $B := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\}$ und $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Betrachten Sie Lösungen $u \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$, $u \not\equiv 0$, des RWPs

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } B, \\ u = 0 & \text{auf } \partial B, \\ u \geq 0 & \text{in } B. \end{cases}$$

(i) Weiter gelte $f(z) \geq \lambda z$ für ein $\lambda \leq 0$ und $z \in [0, \delta]$, $\delta > 0$. Zeigen Sie, dass dann u positiv, radialsymmetrisch und streng radial fallend ist.

(ii) Zeigen Sie, dass im Fall $f : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x, u) = -c(x)u^\alpha$ für ein $c \in L^\infty(\Omega)$ und $0 < \alpha < 1$ die Aussage aus (i) i.A. nicht stimmt. *Hinweis:* Betrachten Sie $u(x) = v(x_1)$, wobei v die entsprechende gewöhnliche Differentialgleichung löst.

Aufgabe 14:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-Rand und $c < 0$. Weiter sei $u \in C^2(\bar{\Omega})$ eine Lösung des überbestimmten RWPs

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega, \\ u = 0, \frac{\partial u}{\partial \nu} = c & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

Zeigen Sie: dann ist Ω eine Kugel um ein $x_0 \in \mathbb{R}^N$ mit Radius $N|c|$, und $u(x) = \frac{1}{2N}((Nc)^2 - |x - x_0|^2)$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie mithilfe der Pohozaev-Identität:

$$Nc^2 |\Omega| = (N + 2) \int_\Omega u \, dx.$$

(ii) Beweisen Sie, dass $|\nabla u|^2 + \frac{2}{N} u$ subharmonisch in Ω ist. Mithilfe des Maximumprinzips und (i) können Sie nun zeigen, dass $|\nabla u|^2 + \frac{2}{N} u \equiv c^2$ in Ω gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass die Lösung u von der Form $u(x) = \frac{1}{2N}(R^2 - |x - x_0|^2)$ ist und bestimmen Sie R.