Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Rainer Mandel
M.Sc. Kevin Drescher

7. Übungsblatt

Nichtlineare Randwertprobleme

Wintersemester 2021/22

30. November 2021

Aufgabe 15:
Es sei X ein Banachraum, $U \subset X$ offen und $I\colon U \to \mathbb{R}$ sei in jedem Punkt $x \in U$ und für alle $h \in X$ Gâteaux-differenzierbar. Weiter gelte zusätzlich $dI(x) \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = X'$ für alle $x \in U$ und die Abbildung $x \mapsto dI(x)$ sei stetig. Zeigen Sie, dass I dann stetig Fréchet-differenzierbar ist und die Fréchet-Ableitung durch die Gâteaux-Ableitung gegeben ist, d.h. es gilt

$$I'(x)[h] = dI(x)[h] \quad (x \in U, h \in X).$$

Aufgabe 16:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $2 \leq p < \frac{2N}{N-2}$ für $N \geq 3$ und $2 \leq p < \infty$ sonst. Zeigen Sie, dass das folgende Funktional

$$F\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad F(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{p} \int_\Omega |u|^p \, dx$$

stetig Fréchet-differenzierbar ist mit Ableitung

$$F'(u)[h] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \, dx - \int_\Omega |u|^{p-2} \, uh \, dx \quad (u, h \in H_0^1(\Omega)).$$