Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Rainer Mandel
M.Sc. Kevin Drescher

8. Übungsblatt

Nichtlineare Randwertprobleme

Wintersemester 2021/22

7. Dezember 2021

Aufgabe 17:
Es seien X, Y und Z Banachräume.

(i) Es sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ konvex, stetig und monoton wachsend. Zeigen Sie, dass das Funktional $I\colon X \to \mathbb{R}$,

$$I(u) = f(\|u\|) \quad (u \in X)$$

schwach unterhalbstetig ist.

(ii) Es sei $V \subset X$ abgeschlossen und konvex und $M := \{u \in X : T(\iota(u)) = 0\}$, wobei $\iota\colon X \to Y$ linear und kompakt und $T\colon Y \to Z$ stetig ist. Zeigen Sie, dass dann $V \cap M$ schwach abgeschlossen ist.

Aufgabe 18:
Es sei $\alpha > -\frac{1}{2}$, X die Vervollständigung des Raums $C^1([-1,1])$ bezüglich der Norm $\|u\|_\alpha^2 := \int_{-1}^1 |x|^{2\alpha} u'(x)^2 \, dx$ und $M := \{u \in X : u(-1) = -1, u(1) = 1\}$. Betrachten Sie auf $X \cap M$ das Funktional

$$I(u) = \int_{-1}^1 |x|^{2\alpha} \, u'(x)^2 \, dx.$$

(i) Beweisen Sie die Existenz eines Minimierers.

(ii) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung von I.

(iii) Berechnen Sie mithilfe von (ii) den Minimierer.

Hinweis zu (i): Ist J ein beschränktes Intervall, dann ist die Einbettung $H^1(J) \hookrightarrow C(\bar{J})$ kompakt. Aufgabe 17 ist hilfreich.