Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Rainer Mandel
M.Sc. Kevin Drescher

9. Übungsblatt

Nichtlineare Randwertprobleme

Wintersemester 2021/22

14. Dezember 2021

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ stets ein beschränktes Lipschitz-Gebiet.

Aufgabe 19:
Es sei $F \in C^1(\mathbb{R})$ und $1 < p < \infty$. Weiter gelte $\limsup_{z \to 0} \frac{F(z)}{|z|^p} \leq 0$. Betrachten Sie das Funktional

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \int_\Omega F(u) \, dx \quad (u \in H_0^1(\Omega)).$$

(i) Zeigen Sie, dass ein Minimierer von I existiert und bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung von I.

(ii) Bestimmen Sie im Fall $F(z) = \frac{\lambda}{q} |z|^q$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $1 < q < p$, für welche λ der Minimierer nichttrivial ist.

Aufgabe 20:

(i) Es seien $f \in L^2(\Omega)$ und $g\colon \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Carathéodory-Funktion mit $|g(x,t)| \leq C(1 + |t|)$ für $(x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$. Bestimmen Sie zu dem RWP

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u = g(x,u) & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

die variationelle Formulierung und zeigen Sie die Existenz eines Minimierers in $H^1(\Omega)$.

(ii) Es sei $f \in L^2(\Omega)$ und $N \leq 8$. Finden Sie zu folgender Differentialgleichung die variationelle Formulierung:

$$\Delta^2 u = f(x) - u^3 \quad \text{in } \Omega.$$

Beweisen Sie die Existenz eines Minimierers $u \in H_0^2(\Omega)$ des entsprechenden Funktionals und zeigen Sie, dass dieser die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt.

Aufgabe 21:
Es sei $\mu > 0$ und das Funktional $I\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$I(u) := \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + \mu \cos(u(x)) \, dx \quad \text{für alle } u \in H_0^1(\Omega).$$

Zeigen Sie:

(i) I hat einen Minimierer $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

(ii) Es existiert ein $\mu_* > 0$, sodass $u_0 = 0$ für alle $0 < \mu < \mu_*$.

(iii) Es existiert ein $\mu^* > 0$, sodass $u_0 \neq 0$ für alle $\mu > \mu^*$.

(iv) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für u_0.