Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Rainer Mandel
M.Sc. Kevin Drescher

10. Übungsblatt

Nichtlineare Randwertprobleme

Wintersemester 2021/22

11. Januar 2022

Aufgabe 22:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet und $g := G'$ für ein $G \in C^1(\mathbb{R})$ genüge der Wachstumsbedingung $|g(z)| \leq C(1 + |z|^r)$ für alle $z \in \mathbb{R}$, wobei $r \in [1, \infty)$ im Fall $N = 1, 2$ bzw. $r \in [1, \frac{2N}{N-2} - 1)$ im Fall $N \geq 3$ ist. Weiter seien die Funktionale $I, J \colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$I(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx, \quad J(u) := \int_\Omega G(u) \, dx.$$

Beweisen Sie die Existenz eines Minimierers u^* von I über V, wobei V gegeben ist durch

$$V := \{u \in H_0^1(\Omega) \colon J(u) = 0\}.$$

Zeigen Sie weiter, dass im Fall $g(u^*) \not\equiv 0$ ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, sodass gilt:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \lambda \int_\Omega g(u) \phi \, dx \quad (\phi \in H_0^1(\Omega)).$$

Hinweis: Verwenden Sie den Satz über implizit definierte Funktionen.

Aufgabe 23:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet und $p \in (1, \infty)$ im Fall $N = 1, 2$ bzw. $p \in (1, \frac{2N}{N-2} - 1)$ im Fall $N \geq 3$. Betrachten Sie auf $H_0^1(\Omega)$ das Funktional

$$I(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega |u|^{p+1} \, dx.$$

Zeigen Sie die „Äquivalenz“ folgender variationeller Probleme, d.h. Problem i besitzt einen Minimierer genau dann, wenn Problem j einen Minimierer besitzt $(i, j = 1, \cdots, 4)$:

1. Minimierung von I über $\{u \in H_0^1(\Omega) \colon \int_\Omega |u|^{p+1} \, dx = 1\}$.
2. Minimierung des Funktionals $\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$ über $\{u \in H_0^1(\Omega) \colon \int_\Omega |u|^{p+1} \, dx = 1\}$.
3. Minimierung von $\sup_{t>0} I(tu)$ über $H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$.
4. Minimierung von I über $\{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \colon I'(u)[u] = 0\}$.