Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Rainer Mandel
M.Sc. Kevin Drescher

11. Übungsblatt

Nichtlineare Randwertprobleme

Wintersemester 2021/22

18. Januar 2022

Aufgabe 24:

(i) Es sei $f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Zeigen Sie: Ist $|f| + |f'|$ koerziv, so erfüllt f die Palais-Smale Bedingung.

(ii) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = 9(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2 + y\sin(x).$$

Zeigen Sie, dass f einen strikt positiven kritischen Wert besitzt.

Aufgabe 25:
Es sei $L > 0$ und $\Omega := (-L, L) \subset \mathbb{R}$. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u'' + (u+1)^+ - u - 1 = 0 & \text{in } \Omega, \\ u(-L) = u(L) = 0, \end{cases}$$

wobei $y^+ = \max\{0, y\}$ für $y \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie das zugehörige Funktional I und zeigen Sie:

(i) Falls $L > \frac{\pi}{2}$, dann existiert ein nichttrivialer kritischer Punkt von I.

(ii) Falls $L < \frac{\pi}{2}$, dann ist 0 der einzige kritische Punkt von I.

Aufgabe 26:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet. Weiter seien $c, \mu\colon \Omega \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen mit $c(x) \geq 0$ für fast alle $x \in \Omega$. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = \mu(x)u^3 & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Falls $\mu(x) \leq 0$ für fast alle $x \in \Omega$, so existiert keine nichttriviale Lösung. Falls $N \leq 3$ und $\mu > 0$ auf einer offenen Teilmenge, so existiert eine nichttriviale Lösung.