

12. Übungsblatt

Nichtlineare Randwertprobleme

Wintersemester 2021/22
25. Januar 2022

Aufgabe 27:

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{cases} u'' - \sin(u) = \lambda e^x & \text{in } (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Zeigen Sie, dass ein $\delta > 0$ existiert, sodass (1) für $0 < |\lambda| < \delta$ eine Lösung $u_\lambda \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ besitzt.

Aufgabe 28:

Es seien $1 \leq N \leq 4$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet. Betrachten Sie für $\epsilon > 0$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = u^3 & \text{in } \Omega, \\ u \equiv \epsilon & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Zeigen Sie, dass ein $\epsilon_0 > 0$ existiert, sodass (2) für $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ eine schwache Lösung u_ϵ mit $u_\epsilon - \epsilon \in H_0^1(\Omega)$ besitzt.