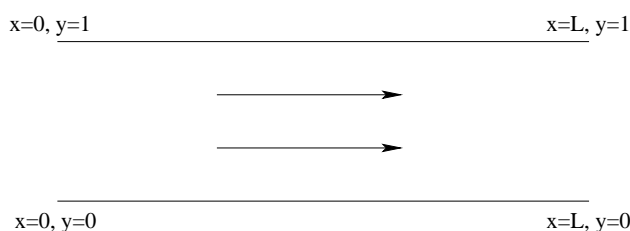


## Nichtlineare Randwertprobleme 1. Übungsblatt

### Aufgabe 1

Betrachten Sie die stationäre Strömung einer viskosen inkompressiblen Flüssigkeit durch eine Leitung der Länge  $L > 0$  und Höhe 1. Das Problem sei zweidimensional.



Finden Sie eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen (mit Viskositätsterm  $\eta\Delta v$  und ohne externe Kraft  $f$ ) von der Form

$$v(x, y) = (u(x, y), 0),$$

die die folgenden Randbedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} p(0, y) = p_1, \quad p(L, y) = p_2 & \quad \text{für alle } y \in (0, 1), \\ u(x, 0) = u(x, 1) = 0 & \quad \text{für alle } x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen  $v$  die Geschwindigkeit,  $p$  den Druck, und  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$  seien gegeben.

### Aufgabe 2

Betrachten Sie die Eulergleichung für die stationäre und reibungsfreie (d.h.  $\eta = 0$ ) Strömung eines Gases. Es sei weiter eine Druck-Dichte-Relation  $p = \hat{p}(\rho)$  gegeben und es treten keine äußeren Kräfte auf.

Eine  $C^1$ -Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt Stromlinie, falls  $\gamma'(s) = v(\gamma(s))$  gilt. Zeigen Sie, dass eine Funktion  $w = w(\rho)$  existiert, so dass

$$\frac{1}{2}|v|^2 + w(\rho)$$

konstant entlang jeder Stromlinie ist.

*Hinweis:* Verwenden Sie die Identität

$$\frac{1}{2}\nabla|v|^2 = (v \cdot \nabla)v + v \times (\text{rot } v)$$

### Aufgabe 3

Betrachten Sie die nichtlineare Schrödingergleichung

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0.$$

Finden Sie für  $\omega > 0$  eine explizite Lösung der Form  $u(x, t) = e^{i\omega t} v(x)$  mit  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} v'(x)$  sowie  $v(x) = v(-x)$ .

### Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion  $\varphi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x, y) = \ln(\cos(y)) - \ln(\cos(x))$ , die sogenannte Scherksche Fläche, eine Minimalfläche ist.

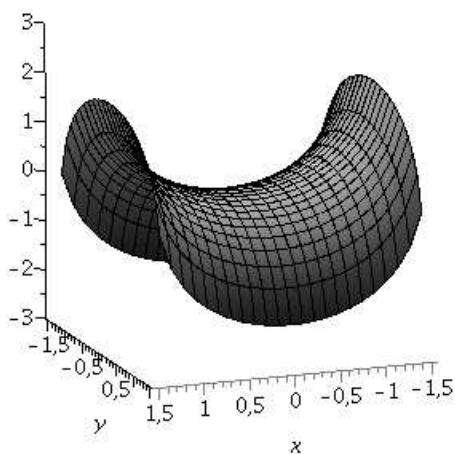


Abbildung 1: Scherksche Fläche

Besprechung in der Übung am 30.10.2013