Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2013/2014

Nichtlineare Randwertprobleme
10. Übungsblatt

Aufgabe 31

Es sei $n \geq 3$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge. Weiter sei $x_0 \in \Omega$, $u = (u_1, \ldots, u_m) \in \left(H^1(\Omega) \cap C^2(\Omega \backslash \{x_0\})\right)^m$ und es gelte

$$-\sum_{j=1}^{m} \operatorname{div}\left(A^{ij}(x) \nabla u_j\right) = 0, \quad (i = 1, \ldots, m)$$

im klassischen Sinn auf $\Omega \backslash \{x_0\}$. Hierbei sei $A^{ij} \in \left(C^1(\Omega \backslash \{x_0\}) \cap L^\infty(\Omega)\right)^{n,n}$, $i, j = 1 \ldots, m$. Zeigen Sie, dass für alle $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ und $i = 1, \ldots, m$ gilt:

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{m} (\nabla \varphi(x))^T A^{ij}(x) \nabla u_j(x)\, dx = 0.$$

Aufgabe 32

Es sei $n \geq 3$ und das Vektorfeld u sei gegeben durch

$$u(x) := x|x|^{-\gamma} \quad (x \neq 0),$$

wobei $\gamma = \frac{n}{2}\left(1 - ((2n-2)^2 + 1)^{-1/2}\right)$. Zeigen Sie: $u \in \left(H^1\left(\{|x| < 1\}\right)\right)^n$ und u ist eine unbeschränkte schwache Lösung des Systems von Euler-Langrange-Gleichungen aus Aufgabe 30.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 31.

Aufgabe 33

Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $1 < p < \begin{cases} \frac{n+2}{n-2}, & n \geq 3 \\ \infty, & n = 2 \end{cases}$

a) Betrachten Sie das nichtlineare Randwertproblem

$$-\Delta u = |u|^{p-1} u \ \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \ \text{ auf } \partial\Omega.$$

Geben Sie ein Funktional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ und eine geeignete Nebenbedingung $J(u) = 0$ an, so dass die Minimierung von I unter dieser Nebenbedingung zu einer nichttrivialen Lösung des obigen Problems führt.

Bitte wenden!

b) Betrachten Sie nun das Problem

$$-\mathrm{div}(A(x)\nabla u) + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

wobei A gleichmäßig positiv definit in Ω sei. Für $V, \Gamma \in L^\infty(\Omega)$ gelte: $V, \Gamma \geq 0$ fast überall in Ω sowie $\Gamma \not\equiv 0$.

Wie sollten Sie in diesem Fall ein Funktional I und eine Nebenbedingung $J(u) = 0$ wählen, um zu einer nichttrivialen Lösung zu gelangen?

Besprechung in der Übung am 15.1.2014